$x+y+z=3$，$xy+yz+zx=3$ を同時に満たす実数の組 $(x,\ y,\ z)$ を全て求めよ。

＜ '04 公立はこだて未来大 改 ＞

【戦略 1】

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)$ **という組はすぐに想像がつきます。**

$x=0$ **としてみても** $\begin{cases} y+z=3 \\ yz=3 \end{cases}$ **で** y，z **は実数として存在しません。**

※ 解と係数の関係から， $u^2-3u+3=0$ **の解が** y，z **で** $u=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

このように簡単な数で探そうとしても見つかりません。

ただ，「実数として存在しない」というのがカギとなってきそうです。

この実験で分かったこととしては

$x=k$ **などというように** x **を何か決めたとき，残りの** y，z **は解と係数の関係によって登場する 2 次方程式から得られるわけです。**

その 2 次方程式の解が実数として存在すればよいことになります。

【解 1】

$x=k$ と固定すると $\begin{cases} y+z=3-k \\ yz=3-k(y+z)\ (=3-k(3-k)) \end{cases}$

すなわち，$\begin{cases} y+z=3-k \\ yz=k^2-3k+3 \end{cases}$

よって，y，z は 2 次方程式

$$u^2-(3-k)u+(k^2-3k+3)=0 \quad \cdots(☆)$$

の解である。

これが実数解として存在しなければならない。

(☆) の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D&=(3-k)^2-4(k^2-3k+3) \\ &=-3k^2+6k-3 \\ &=-3(k-1)^2\leqq 0 \end{aligned}$$

一方，$D\geqq 0$ でなければならないため，$D=0$ となるしかない。

ゆえに，$k=1$ であり，このとき (☆) は $u^2-2u+1=0$

すなわち $(u-1)^2=0$ であり，$u=1$（2 重解）を得るため，$y=z=1$

以上から，求める実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)$ …㊮

【戦略 2】

基本対称式という部分に目をつけて， $xyz=k$ **と設定します。**

そうなると，解と係数の関係から

$$t^3-3t^2+3t-k=0$$

すなわち， $t^3-3t^2+3t=k$ **の解が** x，y，z **ということになります。**

実数解として存在するために， k **をどのように設定しなければならないかを探っていくことになります。**

【解 2】

$xyz=k$ とすると，解と係数の関係から

$$t^3-3t^2+3t-k=0$$

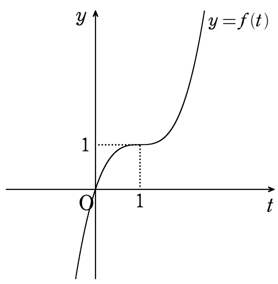
すなわち，$t^3-3t^2+3t=k \ \cdots(*)$ の解が x，y，z である。

よって，$(*)$ の解がすべて実数として存在するための k の範囲を求める。

$f(t)=t^3-3t^2+3t$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(t)&=3t^2-6t+3 \\ &=3(t-1)^2 \end{aligned}$$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$+$
$f(t)$	↗	1	↗



$y=f(t)$，$y=k$ の交点の t 座標が $(*)$ の実数解を表す。

重解を含んだ $(*)$ の 3 つの解が実数解として存在するためには

$k=1$ となり，$f(t)=k$ が $t=1$（3 重解）となるしかない。

よって，$x=y=z=1$ であり，求める実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1) \ \cdots㊮$$

【戦略 3】

実験から $(x, y, z)=(1, 1, 1)$ しかないんじゃないか？ということが匂ってきます。

少し邪推ですが，

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0 \text{ じゃないか？}$$

と実数であることが決め手となるオチを睨むことができれば，一撃で解決します。

【解 3】

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2&=x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+3\\&=x^2+y^2+z^2-2\cdot3+3\\&=x^2+y^2+z^2-3\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=3^2-2\cdot3\\&=3\end{aligned}$$

よって，$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$

x, y, z は実数であるため，$x-1, y-1, z-1$ も実数であり

$$x=1, y=1, z=1$$

となるしかない。

以上から，求める実数の組 (x, y, z) は $(x, y, z)=(1, 1, 1)$ …答

【総括】

未知数の個数に対し，条件の個数が足りないため一見焦りますが，「実数」というさりげない条件が強力に効いてきます。

【解 3】は経験による天下り感が強い解法ですので，経験値が高い人は【解 3】のオチや路線が見えてしまうかもしれません。

それを抜きにしても【解 1】【解 2】のように粘り勝ちも可能ですから諦めない心が大切ですね。