$\dfrac{2013}{2014}<\alpha<\dfrac{2014}{2015}$ を満たすような有理数 α を考える。

$\alpha=\dfrac{q}{p}$ (p , q は自然数) と表すとき，p が最小となるような α を求めよ。

< ’14 横浜市立大 改 >

【戦略】

$0<\alpha<1$ であることから，

$$q=p-m \quad (m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p-1)$$

と設定できます。

これにより，$\dfrac{2013}{2014}<\dfrac{p-m}{p}<\dfrac{2014}{2015}$ ということになり，整理していくと

$$2014m<p<2015m$$

と p が挟めます。

p を小さくしようと思えば当然 $m=1,\ 2,\ \cdots$ と m を小さい方から考えていけばよいことになります。

【解答】

$0<\alpha<1$ より，$1\leqq q<p$ であり，$q=p-m$ ($m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p-1$) と表せる。

このとき，

$$\begin{aligned}
&\frac{2013}{2014}<\frac{p-m}{p}<\frac{2014}{2015}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2013}{2014}<1-\frac{m}{p}<\frac{2014}{2015}\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{1}{2014}<-\frac{m}{p}<-\frac{1}{2015}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2015}<\frac{m}{p}<\frac{1}{2014}\\
\Leftrightarrow\ &2014<\frac{p}{m}<2015\\
\Leftrightarrow\ &2014\,m<p<2015\,m \quad \cdots(*)
\end{aligned}$$

$m=1$ では $(*)$ は $2014<p<2015$

これを満たす自然数 p は存在しない。

$m=2$ では $(*)$ は $4028<p<4030$

これを満たす自然数 p は $p=4029$

したがって，p の最小値は 4029 である。

このとき，$q=p-m=4029-2=4027$

求める α は

$$\alpha=\frac{4027}{4029} \quad \cdots 答$$

(注 $4029=3\cdot17\cdot79$ ， 4027 は素数であり，この α は既約分数)

【総括】

$$\frac{2013}{2014}=0.99950348\cdots\cdots \ ,\quad \frac{2014}{2015}=0.99950372\cdots\cdots$$

と見ても，こっからどないすんねんとなるだけでしょう。

$q=p-m$ と表せるかという「設定力」がモノを言い，難問です。

※ 原題は誘導設問がありましたが，思考力養成のためカットしました。

【ウンチク】

自然数 a , b , c , d が $ad-bc=1\cdots(*)$ を満たしており，p , q を自然数とします。

$\dfrac{c}{d}<\dfrac{q}{p}<\dfrac{a}{b}$ を満たす有理数 $\dfrac{q}{p}$ で，p が最小のものは

$$\frac{c+a}{b+d}$$

となります。

(証明)

$\dfrac{c}{d}<\dfrac{q}{p}<\dfrac{a}{b}$ を満たすとき，$dq-cp>0$, $ap-bq>0$ を満たしますから

$$\begin{cases} dq-cp=x \\ ap-bq=y \end{cases} \quad (x,\ y \text{ は自然数})$$

と表せます。

これを p , q の連立方程式として解くと，

$$p=\frac{dx+by}{ad-bc}\ ,\quad q=\frac{cx+ay}{ad-bc}$$

$(*)$ から，$p=dx+by$, $q=cx+ay$ となります。

p , q を最小にしようとすると，$(x,\ y)=(1,\ 1)$ とすればよく，このとき，

$p=b+d$, $q=a+c$ ですから，p が最小となる題意の有理数は

$$\frac{a+c}{b+d}$$

ということになります。

―――――――――――――――ちなみに―――――――――――――――

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1} \to \frac{0}{1},\ \frac{0+1}{1+1},\ \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1} \to \frac{0}{1},\ \frac{0+1}{1+2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1+1}{2+1},\ \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{1} \to \frac{0}{1},\ \frac{0+1}{1+3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1+1}{3+2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1+2}{2+3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2+1}{3+1},\ \frac{1}{1}$$

というように，隣接する有理数の分母同士，分子同士を足した有理数を入れ込んだ数列を「ファレイ数列」と言い，これも色々興味深い性質があります。