xy 平面において，2 点 $F_1(a\,,\,0)$, $F_2(-a\,,\,0)$ からの距離の積が一定値 a^2 となるような点 P の軌跡を C とする。ただし，$a>0$ である。

(1) 直交座標 $(x\,,\,y)$ に関しての C の方程式を求めよ。

(2) 原点を極とし x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r\,,\,\theta)$ に関しての C の方程式を求めよ。

(3) C で囲まれる部分の面積を S とするとき，S を a を用いて表せ。

＜ '05 鹿児島大 改 ＞

【戦略】

(1) **「$F_1P\times F_2P=a^2$ を満たす点 P 集まれ」という呼びかけに対して集まってくる点 P の集合体が点 P の軌跡です。**

よって，「$F_1P\times F_2P=a^2$ を満たす点 $P(x\,,\,y)$ 集まれ」という呼びかけに対して，どのような $(x\,,\,y)$ が集まってくるかを考えるわけです。

(2) $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ **という極座標と直交座標の関係性を用いて**

(1) で得た直交座標に関する方程式を，極座標に関する方程式に書き換えれば終了です。

この変換作業自体はすぐ終わりますが，極座標や極方程式については細かな部分がウルサイです。

記述でまとめる際には「この = を満たす $(r\,,\,\theta)$ 集まれ」という呼びかけに対して集まってくる点 $(r\,,\,\theta)$（← 極座標）の集合体が C であるという認識が大切です。

(3) **観察力の問題ですが，(1) で得られる C の直交座標表示の式から，今回の曲線 C は x 軸対称でもあり，y 軸対称でもあることが分かります。**

よって，第 1 象限で考えれば，あとは対称性で労力を削減できるわけです。

面積については今回直交座標表示よりも極方程式を利用した方が見通しが良く，

極方程式 $r=f(\theta)$ で与えられる図形の面積が

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

で与えられることを利用して求めます。

【解答】

(1) $P(x\,,\,y)$ として，x，y が満たすべき関係式を求めればよい。

$$F_1P\times F_2P=a^2$$

$$F_1P^2\times F_2P^2=a^4$$

$$\{(x-a)^2+y^2\}\{(x+a)^2+y^2\}=a^4$$

$$(x-a)^2(x+a)^2+\{(x-a)^2+(x+a)^2\}y^2+y^4=a^4$$

$$(x^2-a^2)^2+\{2(x^2+a^2)\}y^2+y^4=a^4$$

$$x^4-2a^2x^2+2x^2y^2+2a^2y^2+y^4=0$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\quad\cdots 答$$

(2) 原点を極，x 軸正の部分を始線とする極座標 $(r\,,\,\theta)$ と直交座標 $(x\,,\,y)$ の間には

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

という関係式が成り立つ。

(1) より，$(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^2=2a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)$

$$r^4=2a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$r^4=2a^2r^2\cos2\theta$$

$$r=0 \quad または \quad r^2=2a^2\cos2\theta$$

$r=0$ が表す図形は原点（極）という 1 点であり，$r^2=2a^2\cos2\theta$ は原点（極）を通る図形を表す極方程式である。

したがって，求める C の方程式は

$$r^2=2a^2\cos2\theta\quad\cdots 答$$

(3) $(p\,,\,q)$ が C 上の点であるとき，(1) より

$$(p^2+q^2)^2=2a^2(p^2-q^2)$$

が成立し，このとき

$$\begin{cases} \{(-p)^2+q^2\}^2=2a^2\{(-p)^2-q^2\} \\ \{p^2+(-q)^2\}^2=2a^2\{p^2-(-q)^2\} \end{cases}$$

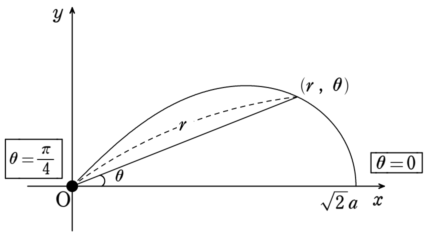
も成立するため，$(-p\,,\,q)$, $(p\,,\,-q)$ も C 上の点である。

つまり，曲線 C は x 軸対称 かつ y 軸対称 のグラフとなる。

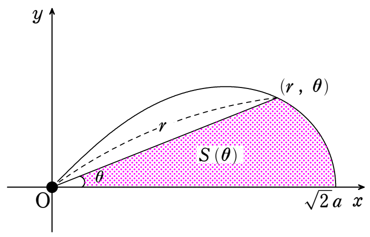
ゆえに，第 1 象限で考える。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で考える。

この範囲の下では，$r=a\sqrt{2\cos 2\theta}$ という極方程式で考えてもよく，r は θ についての単調減少関数であるため，C の第 1 象限の概形は



のような概形となる。

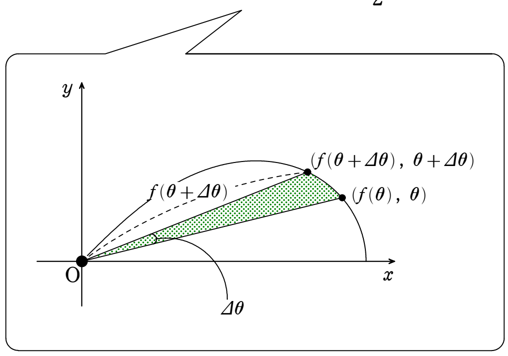


のように，C 上の点 P が $(\sqrt{2}a\,,\,0)$ から $(r\,,\,\theta)$ に至るまでに線分 OP が掃過した部分の面積を $S(\theta)$ とする。

$f(\theta)=a\sqrt{2\cos 2\theta}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおく。

$\varDelta\theta\ (>0)$ に対して，θ から $\theta+\varDelta\theta$ へ変化したときの面積の変化量 $S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)$ は

$$\frac{1}{2}\{f(\theta+\varDelta\theta)\}^2\cdot\varDelta\theta\leqq S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)\leqq\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\cdot\varDelta\theta$$



$$\frac{1}{2}\{f(\theta+\varDelta\theta)\}^2\leqq\frac{S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)}{\varDelta\theta}\leqq\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$$

$\varDelta\theta\to+0$ とすると，はさみうちの原理から

$$\lim_{\varDelta\theta\to+0}\frac{S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)}{\varDelta\theta}=\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$$

$\varDelta\theta<0$ のときも同様に考えれば，

$$\lim_{\varDelta\theta\to-0}\frac{S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)}{\varDelta\theta}=\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$$

つまり，$\displaystyle\lim_{\varDelta\theta\to 0}\frac{S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)}{\varDelta\theta}=\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$ で，これより，

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$$

C で囲まれる部分の面積のうち，第 1 象限の部分の面積は $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり，

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\pi}{4}\right)&=S\left(\frac{\pi}{4}\right)-S(0)\quad(\because S(0)=0)\\&=\Big[S(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}S'(\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta\end{aligned}$$

求める面積は対称性から，

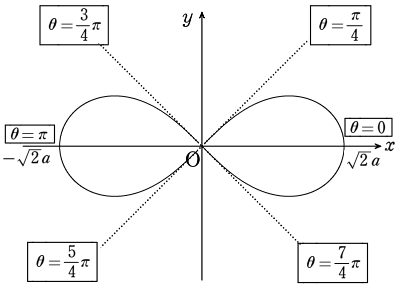
$$\begin{aligned}4S\left(\frac{\pi}{4}\right)&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\theta)^2\,d\theta\\&=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\ d\theta\\&=4a^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=2a^2\Big[\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=2a^2\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

極方程式 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ で与えられる図形を

レムニスケート（連珠形）

と言います。



$r^2\geqq 0$ として存在しなければなりませんから，$\cos 2\theta\geqq 0$ となる範囲で定義されることになります。

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で言えば，$0\leqq 2\theta\leqq 4\pi$ ですから

$0\leqq 2\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi\leqq 2\theta\leqq\frac{5}{2}\pi$，$\frac{7}{2}\pi\leqq 2\theta\leqq 4\pi$ ，すなわち

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}，\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi，\frac{7}{4}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$$

の範囲で定義されます。

なお，２定点 $F_1(b，0)$，$F_2(-b，0)$ に対して

$$F_1P\times F_2P=a^2 \ （一定値）$$

となるような点Ｐの軌跡は「カッシー二の卵形線」と呼ばれます。

$a=b$ のときが本問であり，レムニスケートはカッシー二の卵形線の特殊なものという位置づけです。

$F_1P+F_2P=$（一定）→ 点Ｐの軌跡は楕円
$F_1P-F_2P=$（一定）→ 点Ｐの軌跡は双曲線

は当然知っているでしょうが，

$F_1P\times F_2P=$（一定）→ 点Ｐの軌跡はカッシー二の卵形線

というのは最初に学ぶと「へぇ～」と驚きます。

レムニスケートがその性質を満たしているというのもインパクトが強い結果ですね。