放物線 $C: y^2=4px\ (p>0)$ の焦点 $\mathrm{F}(p, 0)$ を通る 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 は互いに直交し，C と ℓ_1 は 2 点 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ で，C と ℓ_2 は 2 点 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ で交わるとする。

$\dfrac{1}{\mathrm{P_1P_2}}+\dfrac{1}{\mathrm{Q_1Q_2}}$ は ℓ_1, ℓ_2 のとり方によらず一定であることを示せ。

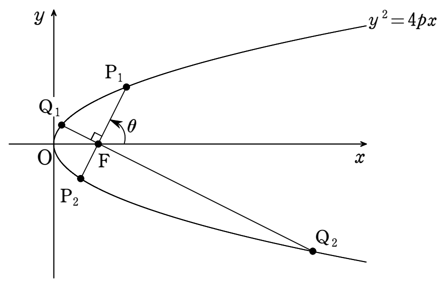
＜ ’13 早稲田大 改 ＞

【戦略】

例題と同様に，焦点 F を極とする極座標を考えます。

この放物線の極方程式 $r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ が得られれば例題同様に計算できます。

【解答】



F を極，x 軸の $x \geqq p$ の部分を始線とする極座標を考える。

$\mathrm{P_1}(r_1, \theta)$ とすると，

$$\mathrm{Q_1}\left(r_2,\ \theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \mathrm{P_2}(r_3,\ \theta+\pi),\ \mathrm{Q_2}\left(r_4,\ \theta+\frac{3}{2}\pi\right)$$

とおける。

直交座標において，$\mathrm{P_1}(X, Y)\ (X \geqq 0)$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FP_1}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\&=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}X-p\\Y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{FP_1}}\right|=r_1$ より，
$$\begin{aligned}r_1&=\sqrt{(X-p)^2+Y^2}\\&=\sqrt{(X-p)^2+4pX}\\&=\sqrt{X^2+2pX+p^2}\\&=\sqrt{(X+p)^2}\\&=|X+p|\\&=X+p\quad(\because X\geqq 0,\ p>0)\end{aligned}$$

$X=p+r_1\cos\theta$ であるため

$$\begin{aligned}r_1&=p+r_1\cos\theta+p\\&=r_1\cos\theta+2p\end{aligned}$$

これより，$r_1=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$

同様にして

$$r_2=\frac{2p}{1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2p}{1+\sin\theta}$$

$$r_3=\frac{2p}{1-\cos(\theta+\pi)}=\frac{2p}{1+\cos\theta}$$

$$r_4=\frac{2p}{1-\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{2p}{1-\sin\theta}$$

という結果を得る。

これより

$$\frac{1}{\mathrm{P_1P_2}}+\frac{1}{\mathrm{Q_1Q_2}}=\frac{1}{r_1+r_3}+\frac{1}{r_2+r_4}$$

ここで，

$$\begin{aligned}r_1+r_3&=\frac{2p}{1-\cos\theta}+\frac{2p}{1+\cos\theta}\\&=2p\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\\&=2p\cdot\frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\\&=2p\cdot\frac{2}{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{4p}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_2+r_4&=\frac{2p}{1+\sin\theta}+\frac{2p}{1-\sin\theta}\\&=2p\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)\\&=2p\cdot\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=2p\cdot\frac{2}{1-\sin^2\theta}\\&=\frac{4p}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{P_1P_2}}+\frac{1}{\mathrm{Q_1Q_2}}&=\frac{\sin^2\theta}{4p}+\frac{\cos^2\theta}{4p}\\&=\frac{1}{4p}\ (\text{一定値})\end{aligned}$$

となり，$\dfrac{1}{\mathrm{P_1P_2}}+\dfrac{1}{\mathrm{Q_1Q_2}}$ は θ によらず一定となることが示された。

また，その一定値は $\dfrac{1}{4p}$ …答

【総括】

最後のオチの式が少し変化しただけで，例題とほぼ同じ要領です。

なお，直交座標表示のまま計算するとなると，少し大変です。

直線 ℓ_1 を $x=ay+p$ ， $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ とします。

ℓ_1 と放物線 C の式を連立すると，$y^2-4apy-4p^2=0$ を得ます。

この 2 解が y_1，y_2 ですから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} y_1+y_2=4ap \\ y_1y_2=-4p^2 \end{cases}$$

となります。

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_1P_2}^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\
&=\{(ay_1+p)-(ay_2+p)\}^2+(y_1-y_2)^2\\
&=(a^2+1)(y_1-y_2)^2\\
&=(a^2+1)\{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\}\\
&=(a^2+1)\{16a^2p^2+16p^2\}\\
&=16p^2(a^2+1)^2
\end{aligned}$$

ということになり，$\mathrm{P_1P_2}=4p(a^2+1)$ を得ます。

ℓ_2 は ℓ_1 と直交するため，$x=-\dfrac{1}{a}y+p$ と表すことができ，同様に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q_1Q_2}&=4p\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\\
&=\frac{4p(a^2+1)}{a^2}
\end{aligned}$$

を得ますから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{P_1P_2}}+\frac{1}{\mathrm{Q_1Q_2}}&=\frac{1}{4p(a^2+1)}+\frac{a^2}{4p(a^2+1)}\\
&=\frac{a^2+1}{4p(a^2+1)}\\
&=\frac{1}{4p}
\end{aligned}$$

と所望の結果が得られます。

やはり，斜めの距離に対する極座標の威力は大きいですね。