

放物線の焦点を通る直交2直線

放物線 $y^2=4px$ ($p>0$) 上に4点があり、それらを y 座標の大きい順に A, B, C, D とする。線分 AC と BD は放物線の焦点 F で垂直に交わっている。ベクトル \overrightarrow{FA} が x 軸の正方向となす角を θ とする。

(1) 線分 AF の長さを p と θ を用いて表せ。

(2) $\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF}$ は θ によらず一定であることを示し、その値を p を用いて表せ。

< '07 名古屋工業大 >

【戦略】

θ の設定のされ方から焦点 F を極とする極座標を考えます。

直交座標では、点 A (X, Y) が放物線上であることは

$$Y^2=4pX$$

と代入によって翻訳されます。

極座標では、A (r, θ) が放物線上であることを翻訳したかったら

$$r, \theta \text{ の関係式 (極方程式)}$$

が必要です。

F を極としているため、FA というのは r に他なりません。

つまり、この放物線の極方程式を求めれば解決するということになりますので、そこを目指すところとします。

(2) (1) で得られる A (r_1, θ) が放物線上にある条件は $r_1 = \frac{2p}{1 - \cos \theta}$

で、これが意味することは

$$r = \frac{2p}{1 - \cos \theta} \text{ という関係を満たす極座標 } (r, \theta) \text{ 集まれ}$$

という呼びかけに対する集合体が今回の放物線であることに他ならず

この放物線を表す極方程式が $r = \frac{2p}{1 - \cos \theta}$ ということになります。

残りの3点

$$B\left(r_2, \theta + \frac{\pi}{2}\right), C\left(r_3, \theta + \pi\right), D\left(r_4, \theta + \frac{3}{2}\pi\right)$$

が放物線上であることを代入によって翻訳すると

$$r_2 = \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{1 + \sin \theta}$$

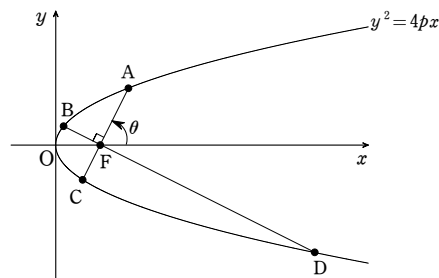
$$r_3 = \frac{2p}{1 - \cos(\theta + \pi)} = \frac{2p}{1 + \cos \theta}$$

$$r_4 = \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{2p}{1 - \sin \theta}$$

となります。

題意の式は $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1}{r_4}$ で、ここからは気持ちよく手なりに進んでいきます。

【解答】



(1) F を極, x 軸の $x \geq p$ の部分を始線とする極座標を考える。

A (r_1, θ) とすると,

$$B\left(r_2, \theta + \frac{\pi}{2}\right), C\left(r_3, \theta + \pi\right), D\left(r_4, \theta + \frac{3}{2}\pi\right)$$

とおける。

直交座標において、A (X, Y) ($X \geq 0$) とする。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF} \\ &= \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X-p \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{FA}| &= r_1 \text{ より, } r_1 = \sqrt{(X-p)^2 + Y^2} \\ &= \sqrt{(X-p)^2 + 4pX} \\ &= \sqrt{X^2 + 2pX + p^2} \\ &= \sqrt{(X+p)^2} \\ &= |X+p| \\ &= X+p \quad (\because X \geq 0, p > 0) \end{aligned}$$

$X = p + r_1 \cos \theta$ であるため

$$\begin{aligned} r_1 &= p + r_1 \cos \theta + p \\ &= r_1 \cos \theta + 2p \end{aligned}$$

$$\text{これより, } r_1 = \frac{2p}{1 - \cos \theta} \quad \dots \text{ ㊦}$$

(2) (1) と同様にして

$$r_2 = \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{1 + \sin \theta}$$

$$r_3 = \frac{2p}{1 - \cos(\theta + \pi)} = \frac{2p}{1 + \cos \theta}$$

$$r_4 = \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{2p}{1 - \sin \theta}$$

という結果を得る。

これより

$$\begin{aligned}\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF} &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1}{r_4} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{2p} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2p} + \frac{1 + \sin \theta}{2p} \cdot \frac{1 - \sin \theta}{2p} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{4p^2} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{4p^2} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{4p^2} + \frac{\cos^2 \theta}{4p^2} \\ &= \frac{1}{4p^2} \text{ (一定値)}\end{aligned}$$

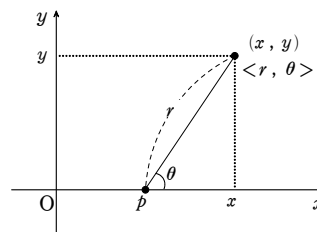
となり、 $\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF}$ は θ によらず一定となることが示された。

また、その一定値は $\frac{1}{4p^2}$ … 圏

【総括】

混乱を避けるため、直交座標は (O, \square) 、極座標は $\langle \odot, \triangle \rangle$ と表すことにします。

極が原点でない場合、(以下では $(p, 0)$ が極とします)



直交座標 (x, y) と極座標 $\langle r, \theta \rangle$ との間には

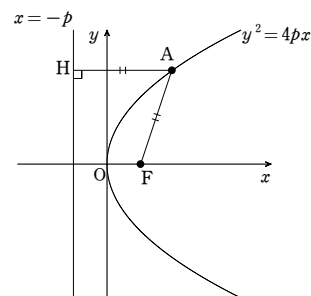
$$\begin{cases} x = p + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

という関係式が成り立ちます。

原点が極だと $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ という見慣れた関係式となりますが、原点が極でないときも対応できるようにしましょう。

なお、【解答】中の $r_1 = X + p$ を得る部分は、放物線 $y^2 = 4px$ の準線が $x = -p$ であることを利用し

$$\begin{aligned}r_1 &= AH \\ &= X - (-p) \\ &= X + p\end{aligned}$$



としてもよいでしょう。

【補足】

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) において, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ とおきます。

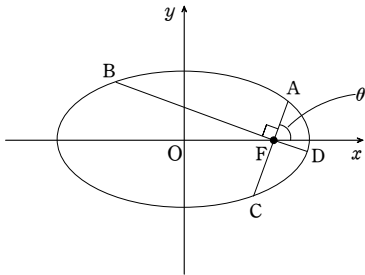
この e を離心率と言います。

焦点 $F(ea, 0)$ を極として, x 軸の $x \geq ea$ を満たす部分を始線とする極座標を考えると, 直交座標表示 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) で与えられる楕円は

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 + e \cos \theta}$$

という極方程式で与えられます。

これにより,



という楕円においても,

$$\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF} \text{ は } \theta \text{ によらず一定}$$

ということが言えます。