次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=x^{-2}2^x$ $(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

＜ '15 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **微分するだけと言ってしまえばそれまでです。**

符号を追っていくために，符号が明らかな部分には目を向けません。

今回は $f'(x)=x^{-3}\cdot 2^x(x\log 2-2)$ **となりますが，**x^{-3} **の符号が確定しないため，**

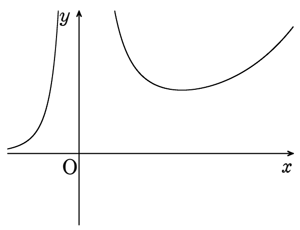
$$x^{-4}\cdot 2^x\,x(x\log 2-2)$$

と見てやることで，$x^{-4}\cdot 2^x$（>0）**の部分は無視できます。**

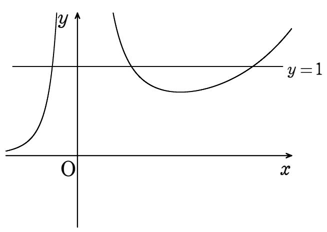
(2) **この流れで** $2^x=x^2$ **という方程式を** $\dfrac{2^x}{x^2}=1$ （$x^{-2}2^x=1$） **と見たくならないわけがありません。**

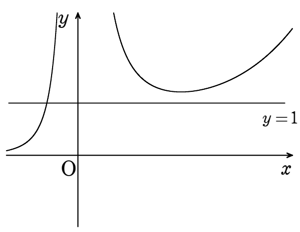
$y=f(x)$，$y=1$ **の共有点が 3 個となることを目指します。**

$f(x)$ **の増減表についても，**$f'(x)>0$ **となる** x **の範囲を** (1) **で出していますから，そこまで労力もかかりません。**



という概形になります。





の 2 つの可能性がありますが，$f(2)=f(4)=1$ **という自明な解に注意すれば，左側のグラフの位置関係ということになります。**

(3) $x=2$，4 **が解であることは即分かりますから，残る一つが問題です。**

この解は (2) **のグラフから負の解であることになりますから，**$x=-\dfrac{p}{q}$

などとおいて，$2^{-\frac{p}{q}}=\left(-\dfrac{p}{q}\right)^2$ **を満たす正整数** p，q **を求めにいきます。**

求まればよいし，求まらず矛盾してしまえば背理法が完成します。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} f'(x)&=-2x^{-3}\cdot 2^x+x^{-2}\cdot 2^x(\log 2)\\ &=x^{-3}\cdot 2^x(x\log 2-2)\\ &=x^{-4}\cdot x\cdot 2^x(x\log 2-2)\\ &=x^{-4}\cdot 2^x\,x(x\log 2-2)\end{aligned}$$

$x^{-4}\cdot 2^x>0$ であるため，$f'(x)>0$ となるためには

$$x(x\log 2-2)>0$$

この x についての 2 次不等式を解き，$x<0$，$\dfrac{2}{\log 2}<x$ …㊎

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は $x=0$ を解にもたない。

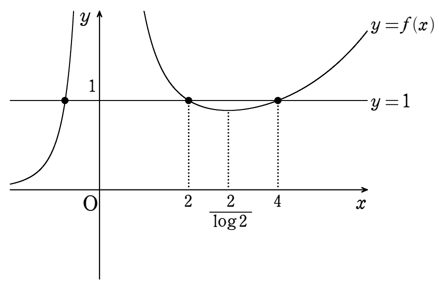
ゆえに，$\dfrac{2^x}{x^2}=1$，すなわち $f(x)=1$ を満たす相異なる x が 3 個存在することを示せばよい。

よって，$y=f(x)$，$y=1$ のグラフが相異なる 3 個の共有点をもつことを示せばよい。

(1) の結果も利用しながら $f(x)$ の増減表を考えると以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	∞ ∞	$\searrow$		$\nearrow$	(∞)

$2^2=2^2$，$2^4=4^2$ であることから，$f(2)=1$，$f(4)=1$ であることにも注意すると，$y=f(x)$ と $y=1$ のグラフの位置関係は以下のようになる。



以上から，$y=f(x)$ と $y=1$ は相異なる 3 個の共有点をもつ。

よって，題意は示された。

(3) (2) より，$x=2$，4 は $2^x=x^2$ の有理数解である。

残る 1 つは (2) のグラフより負の解である。

それが有理数と仮定し，$-\dfrac{p}{q}$（p，q は互いに素な正の整数）とおく。

$$2^{-\frac{p}{q}}=\left(-\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2^{-\frac{p}{q}}=\frac{p^2}{q^2}$$

$$2^{-p}=\left(\frac{p^2}{q^2}\right)^q$$

$$2^{p}=\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^q$$

$\dfrac{q^2}{p^2}$ は整数であり，p，q は互いに素で共通の素因数をもたないため，$p=1$

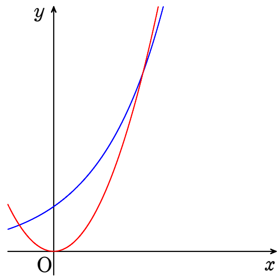
これより，$2=q^{2q}$ となり，左辺は平方数でないが，右辺は平方数となり矛盾する。

以上から，$2^x=x^2$ の有理数解は $x=2$，4 …答

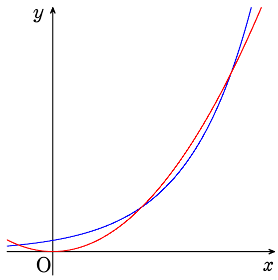
【総括】

$2^x=x^2$ の解を考えるにあたり，$y=2^x$，$y=x^2$ という 2 曲線はそれぞれで見れば微分なしにグラフがかける有名人です。

ただ，$y=2^x$，$y=x^2$ はどちらも下に凸であり，凸性が同じ 2 曲線の位置関係はウルサイものがあります。



一見，共有点は 2 つのように見えますが，実際には



と言った具合です。(今回は証明問題なので結論が分かっていますが)

なので，曲線と曲線の話ではなく，曲線と直線 (← 直線ならば紛れがない) という話で考えるのが安全ということになるわけです。

なお，(2) で $x=2$，4 という解の存在に気が付かなかった場合，以下のように $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right)<1$ を示すことで，無理やり示すこともできます。

$$f\left(\frac{2}{\log 2}\right)=\frac{2^{\frac{2}{\log 2}}}{\left(\dfrac{2}{\log 2}\right)^2}$$

$$=\frac{(e^{\log 2})^{\frac{2}{\log 2}}}{\left(\dfrac{e^{\log 2}}{\log 2}\right)^2} \quad (\text{注：}\ 2=e^{\log 2})$$

$$=\frac{e^2}{\dfrac{e^{\log 4}}{(\log 2)^2}}$$

$$=\frac{e^2(\log 2)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{e\log 2}{2}\right)^2$$

よって，$\dfrac{e\log 2}{2}<1$ を示せばよく，それすなわち

$$e\log 2<2$$

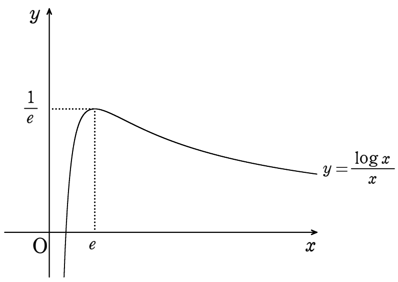
$$\log 2^e<\log e^2$$

$$2^e<e^2$$

を示せばよいことになるわけです。

これを示そうと思うと，経験が必要ですが，$y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ のグラフを利用してやります。

微分して増減表を書く部分はおまかせしますが



のような概形となりますので，$\dfrac{\log 2}{2}<\dfrac{\log e}{e}$

すなわち，$e\log 2<2\log e$ で，$\log 2^e<\log e^2$ を得るため解決します。

ただ，(3) もあることなので，遅かれ早かれ $x=2$，4 という解の存在に気が付く必要はあるでしょう。

$2^x=x^2$ が解をもつとしたら，$x=2^{\square}$ という形であることを想定すれば見えてくるはずです。