a を正の実数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$ を求めよ。

＜ ’77 名古屋大 ＞

【戦略】

ひとまず一般に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)$ を考えて，$b=a^2$ のときを考えればよいでしょう。

これについては，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$ であり，実質的には例題で扱った $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$ を考えるに等しい問題です。

【解答】

一般に，正の実数 a，b について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)$ を考える。

[1]　$0<a<b$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{b^n\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log b^n+\log\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\log b+\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}\right\}\\&=\log b\quad\left(\because\ 0\leqq\left(\frac{a}{b}\right)^n<1\right)\end{aligned}$$

[2]　$0<b<a$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{a^n\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log a^n+\log\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\log a+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\right\}\\&=\log a\quad\left(\because\ 0\leqq\left(\frac{b}{a}\right)^n<1\right)\end{aligned}$$

[3]　$0<a=b$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(2a^n)\\&=\lim_{n\to\infty}\log(2a^n)^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\log 2^{\frac{1}{n}}a\right\}\\&=\log a\end{aligned}$$

これは，[1]，[2] どちらの結果に含めてもよい。

[1]，[2]，[3] より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)=\begin{cases}\log a & (0<b\leqq a\text{ のとき})\\ \log b & (0<a\leqq b\text{ のとき})\end{cases}$$

今，$b=a^2$ であるときを考えると

$0<a\leqq 1$ のとき，$0<a^2\leqq a$ であるため，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\log a$$

$a\geqq 1$ のとき，$0<a\leqq a^2$ であるため

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\log a^2=2\log a$$

以上から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\begin{cases}\log a & (0<a\leqq 1\text{ のとき})\\ 2\log a & (a\geqq 1\text{ のとき})\end{cases}$ …答

【総括】

a，b を正の実数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)$ を求めよ。

であれば，正答率はわずかに上がるかもしれません。

今は例題との関連が見えやすいようにわざわざ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)$ を経由しましたが，もちろん最初から

$0<a<1$ のとき，$a>1$ のとき，$a=1$ のとき

とやってもよいでしょう。