a，b を 0 以上の実数とするとき，$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

＜ '07 聖マリアンナ医科大 改 ＞

【戦略 1】

例えば，$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ であれば，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left\{3^n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=3\end{aligned}$$

と，「より強きもので括る」とするでしょうし，それが常套手段の一つです。

そうなってくると，

a，b のうちどちらがより強きものなのか

という疑問が湧いてきますから，a，b の大小による場合分けが生じることに気が付くでしょう。

【解 1】

[1]　$0\leqq a<b$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left\{b^n\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=b\ \left(\because\ 0\leqq\left(\frac{a}{b}\right)^n<1\right)\end{aligned}$$

[2]　$0\leqq b<a$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left\{a^n\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}a\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=a\ \left(\because\ 0\leqq\left(\frac{b}{a}\right)^n<1\right)\end{aligned}$$

[3]　$0\leqq a=b$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}(2a^n)^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}a\\&=a\end{aligned}$$

これは，[1]，[2] どちらの結果に含めてもよい。

[1]，[2]，[3] より，

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}a\ (0\leqq b\leqq a\ のとき)\\ b\ (0\leqq a\leqq b\ のとき)\end{cases}\cdots 答$$

【戦略 2】

より強きものに注目するのは【戦略 1】と同様の態度です。

例えば $0\leqq a<b$ のときに b^n から見た a^n というのは n が十分大きいときに無視できるぐらい影響はなく，

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\fallingdotseq(b^n)^{\frac{1}{n}}\ (=b)$$

というイメージをもとに

$$b^n\leqq a^n+b^n<2b^n$$

とはさむことで，はさみうちの原理で仕留めることを目論みます。

【解 2】

(1)　[1]　$0\leqq a<b$ のとき

$0\leqq a^n<b^n$ なので，$b^n\leqq a^n+b^n<2b^n$

ゆえに，辺々 $\dfrac{1}{n}$ 乗すれば，$b\leqq(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}b$

(最左辺) $\xrightarrow{n\to\infty}$ b

はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=b$

[2]　$0\leqq b<a$ のとき

[1] において a，b の立場を入れ替えて考えれば

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

[3]　$0\leqq a=b$ のとき

$$\begin{aligned}(与式)&=\lim_{n\to\infty}(2a^n)^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}a\\&=a\end{aligned}$$

これは，[1]，[2] どちらの結果に含めてもよい。

[1]，[2]，[3] より，$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}a\ (0\leqq b\leqq a\ のとき)\\ b\ (0\leqq a\leqq b\ のとき)\end{cases}\cdots 答$

【総括】

【戦略】で述べましたが，$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ などという具体例だったらどういう態度で倒すのかということを考えれば自然に場合分けに行き着きます。

$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ も　$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$ も倒し方は変わりませんから。