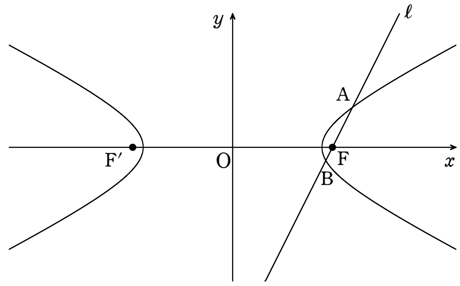
下の図のように，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ の右と左の焦点を F と F′ とする。点 F を通り，傾き k が正の直線 ℓ を，双曲線と 2 点 A，B で交わるように引く。ただし，A，B の x 座標はいずれも正とする。



(1) 焦点 F の x 座標を求めよ。
(2) k のとり得る値の範囲を求めよ。
(3) $\mathrm{F'A}+\mathrm{F'B}=12$ のとき，線分 AB の長さを求めよ。また，このとき k の値を求めよ。

＜ ’10 東京理科大 ＞

【戦略】

(1) **双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2+b^2}\,,\,0)$ です。**

(2) **直線 ℓ の方程式 $y=k\,(x-\sqrt{5})$ と双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ を連立して出てくる x の 2 次方程式**

$$(4k^2-1)x^2-8\sqrt{5}\,k^2x+(20k^2+4)=0 \ \cdots(*)$$

が異なる 2 つの正の解をもつための k の範囲を求めればよいことになります。

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=4\,(k^2+1)>0$ となり，異なる 2 つの実数解をもつことは保証されています。

あとは正の解ということを叶えるために，「軸の位置」と $f(0)$ を気にすることになります。

(3) **双曲線の幾何的性質 $\begin{cases}\mathrm{F'A}-\mathrm{FA}=4\\ \mathrm{F'B}-\mathrm{FB}=4\end{cases}$ を用いたくなるでしょう。**

条件を活かすためには辺々加えたくなります。

すると，$12-(\mathrm{FA}+\mathrm{FB})=8$ となり，$\mathrm{FA}+\mathrm{FB}=4$

すなわち $\mathrm{AB}=4$ と，AB の長さは即解決します。

このときの k の値については $(*)$ の解 α，β を用いて

$$\mathrm{A}\,(\alpha\,,\,k\,(\alpha-\sqrt{5}\,))\,,\ \mathrm{B}\,(\beta\,,\,k\,(\beta-\sqrt{5}\,))$$

とおくことができ，AB^2 を計算します。

その際，解と係数の関係を用いて進めていくという手なりの処理となります。

【解答】

(1) F の x 座標は $\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ …答

(2) 直線 ℓ の方程式は

$$y=k\,(x-\sqrt{5}\,)$$

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-y^2=1 \ \cdots ① \\ y=k\,(x-\sqrt{5}\,) \cdots ②\end{cases}$ を連立して y を消去する。

② を ① に代入し，$\dfrac{x^2}{4}-k^2(x-\sqrt{5}\,)^2=1$

これを整理すると

$$(4k^2-1)x^2-8\sqrt{5}\,k^2x+(20k^2+4)=0 \ \cdots(*)$$

$(*)$ は 2 次方程式として存在するため，$4k^2-1\neq 0$

$k>0$ を考えると，$k\neq\dfrac{1}{2}\cdots$③

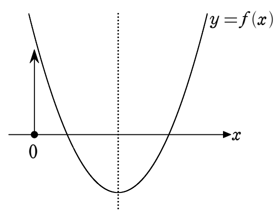
このとき，$(*)$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}>0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-4\sqrt{5}\,k^2)^2-(4k^2-1)(20k^2+4)\\&=80k^4-(80k^4-4k^2-4)\\&=4\,(k^2+1)\end{aligned}$$

よって，k の値に関わらず $(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

これらが 2 つとも正の解であればよい。

$f(x)=(4k^2-1)x^2-8\sqrt{5}\,k^2x+(20k^2+4)$ とおく。



$f(0)=20k^2+4\ (\,>0\,)$ に注意すると

$y=f(x)$ が下に凸の放物線で，$4k^2-1>0$，すなわち

$$k<-\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}<k$$

条件 $k>0$ を考えると $k>\dfrac{1}{2}\cdots$④

$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=\dfrac{4\sqrt{5}\,k^2}{4k^2-1}>0$ で，④ に注意すると $4\sqrt{5}\,k^2>0$，条件 $k>0$ を考えると，$k>0\cdots$⑤

③，④，⑤ を全て満たす k の範囲を求め，$k>\dfrac{1}{2}$ …答

(3)　A，B は双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上の点であるため，双曲線の幾何的性質から

$$\begin{cases} \mathrm{F'A}-\mathrm{FA}=4 \\ \mathrm{F'B}-\mathrm{FB}=4 \end{cases}$$

を満たす。

辺々加えると，$\mathrm{F'A}+\mathrm{F'B}-(\mathrm{FA}+\mathrm{FB})=8$

条件 $\mathrm{F'A}+\mathrm{F'B}=12$ より，$12-(\mathrm{FA}+\mathrm{FB})=8$ ，すなわち

$$\mathrm{FA}+\mathrm{FB}=4$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{FA}+\mathrm{FB}$ であるから，$\mathrm{AB}=4$ …答

(2) の (*) の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$\mathrm{A}(\alpha,\ k(\alpha-\sqrt{5})),\ \mathrm{B}(\beta,\ k(\beta-\sqrt{5}))$$

として考えることができる。

すると，
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(\beta-\alpha)^2+\{k(\beta-\sqrt{5})-k(\alpha-\sqrt{5})\}^2\\&=(k^2+1)(\alpha-\beta)^2\\&=(k^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\end{aligned}$$

解と係数の関係から，
$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{8\sqrt{5}k^2}{4k^2-1} \\ \alpha\beta=\dfrac{20k^2+4}{4k^2-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(k^2+1)\left\{\left(\frac{8\sqrt{5}k^2}{4k^2-1}\right)^2-4\cdot\frac{20k^2+4}{4k^2-1}\right\}\\&=(k^2+1)\cdot\frac{16(k^2+1)}{(4k^2-1)^2}\\&=\left\{\frac{4(k^2+1)}{4k^2-1}\right\}^2\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=4$ より，$\left\{\dfrac{4(k^2+1)}{4k^2-1}\right\}^2=16$

$$\left(\frac{k^2+1}{4k^2-1}\right)^2=1$$

$$(k^2+1)^2=(4k^2-1)^2$$

$$\{(4k^2-1)+(k^2+1)\}\{(4k^2-1)-(k^2+1)\}=0$$

$$5k^2(3k^2-2)=0$$

$k>\dfrac{1}{2}$ より，$k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ …答

【総括】

２次曲線の分野は必然的に２次方程式に関する解の議論に帰着することが多いです。

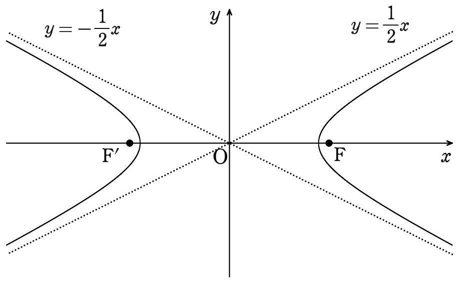
特に解の配置問題などの基本的な定番処理については確実に自分のものとしておきましょう。

大抵数式でゴリゴリやっていく問題が多い中，幾何的性質を用いてスパッと斬る問題はやはり気持ちがいいものです。

なお，(2) の $k>\dfrac{1}{2}$ という結論についてですが，

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ の漸近線が $y=\pm\dfrac{1}{2}x$

ということを考えると納得できる結論でしょう。



本問は，まとめると

- 双曲線の幾何的な性質
- 双曲線の焦点の導出
- 双曲線と直線の連立に関わる立式と，その後の処理
- 双曲線の漸近線

と様々な基本的内容が盛り込まれているコスパの良い標準問題と言えましょう。