半径 1 の円周上に $4n$ 個の点 P_0，P_1，……，P_{4n-1} が反時計回りに等間隔で並んでいるとする。ただし，n は自然数とする。

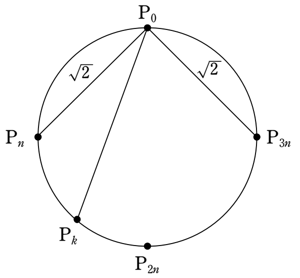
(1) 線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2) 点 P_0，P_1，……，P_{4n-1} の相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。

＜ '01 大阪大 ＞

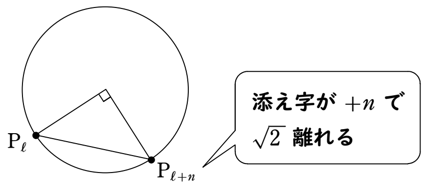
【戦略】

(1)



というようなイメージがあれば即 $n \leqq k \leqq 3n$ と片付きます。

(2) **結局添え字が $+n$ されると距離が $\sqrt{2}$ となることになります。**

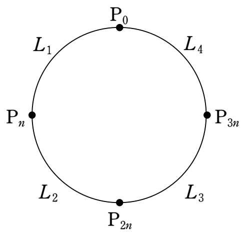


ひとまず頂点の 1 つを P_0 として考えます。

そうなると，残る 2 点は

弧 L_2 上の点 (P_ℓ とする)
弧 L_3 上の点 (P_m とする)

から 1 つずつ選ぶことになります。

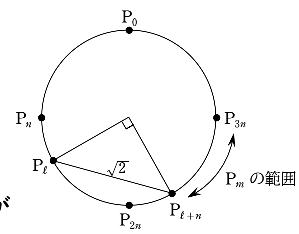


ℓ の範囲は $n \leqq \ell \leqq 2n$ です。

先ほどの話で，添え字が $+n$ されると距離が $\sqrt{2}$ となります。

そうなってくると，P_m としては

$\mathrm{P}_{\ell+n}$ ～ P_{3n} の中から選ぶことになります。



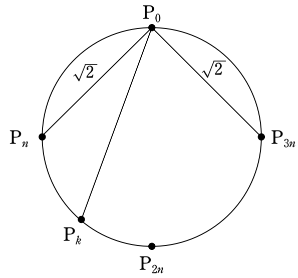
つまり，ℓ を決めたときの m の決め方が
$3n-(\ell+n)+1=2n-\ell+1$【通り】
ということになり，あとは $\ell=n$，$n+1$，…，$2n$ として
$\sum$ 計算でカウントすればよいでしょう。

今，頂点の 1 つを P_0 と固定して考えましたが，頂点の 1 つが
P_1，P_2，…，P_{4n-1}
としても同様にカウントできます。

ただし，最後の詰めとして，重複の解消を忘れてはなりません。

【解答】

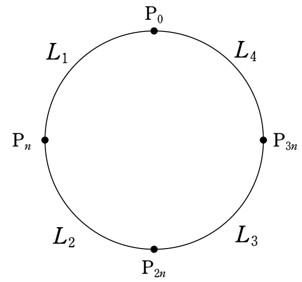
(1) (図 1) より $n \leqq k \leqq 3n$ …答



(図 1)

(2) 頂点の 1 つを P_0 と固定する。

残り 2 つの頂点を
P_ℓ，P_m
とする。
($0 \leqq \ell < m \leqq 4n-1$)



(図 2)

(図 2) の
弧 L_1，L_2，L_3，L_4 のうち
同じ弧の上に 2 点があると
その 2 点を結んだ線分の長さは
$\sqrt{2}$ 未満になってしまう。

よって，P_ℓ は L_2，P_m は L_3 の上にある点である。

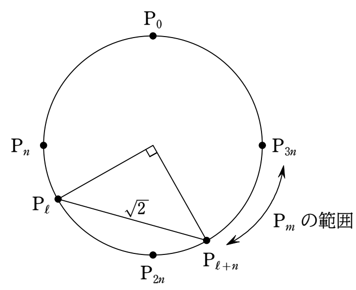
ゆえに，$n \leqq \ell \leqq 2n$ …①

また，(図 3) より
$\ell+n \leqq m \leqq 3n$ …②

② より，P_m は

$3n-(\ell+n)+1$
$=2n-\ell+1$【通り】

の取り方がある。



(図 3)

① より，P_ℓ，P_m の取り方は

$$\sum_{\ell=n}^{2n}(2n-\ell+1)=(n+1)+n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\text{【通り】}$$

つまり，頂点の 1 つを P_0 としたとき，題意の三角形は
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\text{ 個}$$

頂点の 1 つが P_1，P_2，……，P_{4n-1} としても各々 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 個

したがって，$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\times 4n=2n(n+1)(n+2)$【個】…(*)

しかし，この中には例えば $\begin{cases} \mathrm{P}_0 \text{を固定} \rightarrow \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_{3n} \text{を選ぶ} \\ \mathrm{P}_n \text{を固定} \rightarrow \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_{3n} \text{を選ぶ} \\ \mathrm{P}_{3n} \text{を固定} \rightarrow \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_n \text{を選ぶ} \end{cases}$

という 3 通りは $(*)$ の中では別のものとしてカウントされているが，実際には同じ三角形ができる。

このように各頂点を固定し，残り 2 つの頂点を決めると， 同じ三角形を 3 回カウントすることになるため

$$g(n) = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3} \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

ざっくりと

添え字が $+n$ されると距離が $\sqrt{2}$ 離れる

という部分を見抜き，$\sum$ 計算によって仕留めるという流れはどちらかと言えばマニュアル的態度というよりも「その場力」が求められる類の流れと言ってよいでしょう。

最後の重複解消についても差が付き，最後まで気が抜けない問題でした。

円周上の点によって三角形を作る問題は頻出で，よくあるのは鋭角三角形や鈍角三角形などを数えさせる問題です。

本問は円周上の点で三角形を作るという定番の問題から一歩踏み込んだ思考要素を要求する実戦的な問題だと思います。