原点を O とする複素数平面上の 4 点 O，A，B，C を頂点にもつ長方形 OABC を考える。ただし，この 4 点 O，A，B，C はこの順に反時計回りに並んでいるものとする。

複素数平面上で，A，B の表す複素数をそれぞれ α，β とし，

$$|\alpha|=1,\ |\beta-\alpha|=k\ (\text{ただし，}k>0)$$

であるとき，正方形 OBDE を 4 点 O，B，D，E がこの順に反時計回りに並ぶように作る。このとき，△CDE が二等辺三角形となるような k の値を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，E(z) **としたとき，**

$$\gamma=\alpha\cdot(ki)=ki\alpha$$

$$\beta=\alpha+\gamma=(1+ki)\alpha$$

$$\begin{aligned}\delta&=\beta\cdot\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=(1+i)\beta\\&=(1+i)(1+ki)\alpha\\&=\{(1-k)+(1+k)i\}\alpha\end{aligned}$$

$$z=\beta i=(-k+i)\alpha$$

と，順次 α を用いて表せます。

そうなるとカギとなる

線分 CD の長さ $|\delta-\gamma|$
線分 EC の長さ $|\gamma-z|$

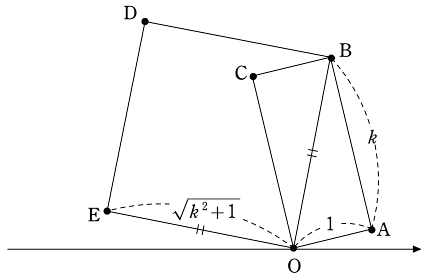
が計算できます。
※ 線分 DE の長さは OB$=\sqrt{k^2+1}$ と同じ

三角形 CDE が二等辺三角形となるとき

$$\text{CD}=\text{CE}\text{，または DC}=\text{DE}\text{，または EC}=\text{ED}$$

として処理すればよいでしょう。

【解答】



点 C が表す複素数を γ とする。

線分 OA を O を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転し，長さを k 倍したものが線分 OC であるから，

$$\gamma=\alpha\cdot\left\{k\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}=ki\alpha$$

$\beta=\alpha+\gamma$ であるため，$\beta=(1+ki)\alpha$

D が表す複素数を δ とすると，線分 OB を O を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転し，長さを $\sqrt{2}$ 倍したものが線分 OD であるから

$$\begin{aligned}\delta&=\beta\cdot\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=(1+i)\beta\\&=(1+i)(1+ki)\alpha\\&=\{(1-k)+(1+k)i\}\alpha\end{aligned}$$

E が表す複素数を z とすると，線分 OB を点 O を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転したものが線分 OE であるため

$$\begin{aligned}z&=\beta\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=i\beta\\&=i(1+ki)\alpha\\&=(-k+i)\alpha\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\text{CD}&=|\delta-\gamma|\\&=|(1-k)+i|\\&=\sqrt{(1-k)^2+1}\\&=\sqrt{k^2-2k+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{EC}&=|\gamma-z|\\&=|\,ki\alpha-(-k+i)\alpha\,|\\&=|\alpha|\,|\,k+(k-1)i\,|\\&=1\cdot\sqrt{k^2+(k-1)^2}\\&=\sqrt{2k^2-2k+1}\end{aligned}$$

(i)　CD＝CE のとき

$$\sqrt{k^2-2k+2}=\sqrt{2k^2-2k+1}$$

$$k^2-2k+2=2k^2-2k+1$$

$$k^2-1=0$$

$$(k+1)(k-1)=0$$

$$k>0 \text{ より } k=1$$

(ii)　DC＝DE のとき

$$\sqrt{k^2-2k+2}=\sqrt{k^2+1}$$

$$k^2-2k+2=k^2+1$$

$$k=\frac{1}{2}$$

(iii)　EC＝ED のとき

$$\sqrt{2k^2-2k+1}=\sqrt{k^2+1}$$

$$2k^2-2k+1=k^2+1$$

$$k^2-2k=0$$

$$k(k-2)=0$$

$k>0$ より，$k=2$

以上 (i)，(ii)，(iii) より，求める k の値は $k=1,\ 2,\ \frac{1}{2}$ …答

【総括】

どの 2 辺が等しいかで 3 パターンの場合分けが生じますが，発想はそこまでひねくれた発想ではなく，計算量，処理量もそこまで膨れあがることもありません。

複素数平面は，通常の座標平面とリンクさせることが大変多いため，どうしても別解を避けづらい傾向が強いですが，本問の場合 $\arg\alpha$ を与えていないため，座標設定しても，計算量的にむしろ負担が大きくなります。

k（＝長方形の 1 辺の長さ）を求めればいいだけで，「向きは関係ない」と見抜き，

A$(1,\ 0)$，B$(1,\ k)$，C$(0,\ k)$ と設定しても一般性を失わない

ということに気がつけば，若干ではありますが，負担は減ると思います。

それにしても，劇的な負担減少というわけでもないので複素数平面の力を借りながら解き進める方が現実的でしょう。