m，n を $m<n$ を満たす2以上の1桁の整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{3}$ を n 進法表示したとき有限小数となる n を求めよ。

(2) a，b を1桁の整数とする。
小数表示で $0.a_{(m)}=0.b_{(n)}$ となる組 $(a,\ b,\ m,\ n)$ を全て求めよ。

＜自作＞

【戦略】

例えば10進法において，296.74 は

$$296.74=2\cdot10^2+9\cdot10^1+6\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}$$

というように，$10^{\square}$ を用いて数を表現できます。

n 進法においては，$\square\cdot n^{\bigcirc}+\triangle\cdot n^{\bigcirc-1}+\cdots\cdots$ と同じ要領で表現します。

(1) $\dfrac{1}{3}=1\cdot3^{-1}=0.1_{(3)}$，$\dfrac{2}{6}=2\cdot6^{-1}=0.2_{(6)}$，$\dfrac{3}{9}=3\cdot9^{-1}=0.3_{(9)}$

と見ることができるため，$n=3,\ 6,\ 9$ と即分かります。

(2) **結局，$0.a_{(m)}=0.b_{(n)}$ が成り立つとき**

$$a\cdot m^{-1}=b\cdot n^{-1}$$

すなわち

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$$

という関係が成り立ち，これを満たす $(a,\ b,\ m,\ n)$ を求めることになります。

【解答】

(1) $\dfrac{1}{3}=1\cdot3^{-1}=0.1_{(3)}$

$\dfrac{2}{6}=2\cdot6^{-1}=0.2_{(6)}$

$\dfrac{3}{9}=3\cdot9^{-1}=0.3_{(9)}$

以上から，求める n は $n=3,\ 6,\ 9$ …答

(2) $0.a_{(m)}=0.b_{(n)}$ とは，$a\cdot m^{-1}=b\cdot n^{-1}$

すなわち，$\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}$

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}$ より，$0.1_{(2)}=0.2_{(4)}=0.3_{(6)}=0.4_{(8)}$

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{9}$ より，$0.1_{(3)}=0.2_{(6)}=0.3_{(9)}$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{8}$ より，$0.1_{(4)}=0.2_{(8)}$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{6}{9}$ より，$0.2_{(3)}=0.4_{(6)}=0.6_{(9)}$

$\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{8}$ より，$0.3_{(4)}=0.6_{(8)}$

ゆえに，求める $(a,\ b,\ m,\ n)$ の組は

$(a,\ b,\ m,\ n)=(1,\ 2,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 2,\ 6),\ (1,\ 4,\ 2,\ 8),\ (2,\ 3,\ 4,\ 6)$
$(2,\ 4,\ 4,\ 8),\ (3,\ 4,\ 6,\ 8),\ (1,\ 2,\ 3,\ 6),\ (1,\ 3,\ 3,\ 9)$
$(2,\ 3,\ 6,\ 9),\ (1,\ 2,\ 4,\ 8),\ (2,\ 4,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3,\ 9)$
$(4,\ 6,\ 6,\ 9),\ (3,\ 6,\ 4,\ 8)$ …答

【総括】

確かな力があれば即解決，そうでなければフリーズ，というように，はっきりと差が付くでしょう。