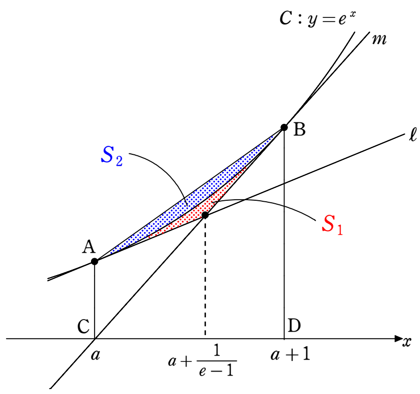
曲線 $C: y=e^x$ 上の 2 点 A $(a,\ e^a)$，B $(a+1,\ e^{a+1})$ における接線を，それぞれ ℓ，m とする。

ℓ，m，及び曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1，直線 AB と曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ は a の値によらない定数であることを示せ。

＜自作＞

【戦略】

接線 ℓ，m の式を立て，交点の x 座標を求め，状況を図示すると



という状況です。

$$S_2=(\text{台形 ACDB の面積})-\int_a^{a+1} e^x\,dx$$

として計算し，S_1 については，$\displaystyle\int_a^{a+1} e^x dx$ から 2 つの台形を除くのがよいでしょう。

【解答】

接線 ℓ の方程式は $y=e^a(x-a)+e^a$，すなわち

$$y=e^a(x-a+1)$$

接線 m の方程式は $y=e^{a+1}\{x-(a+1)\}+e^{a+1}$，すなわち

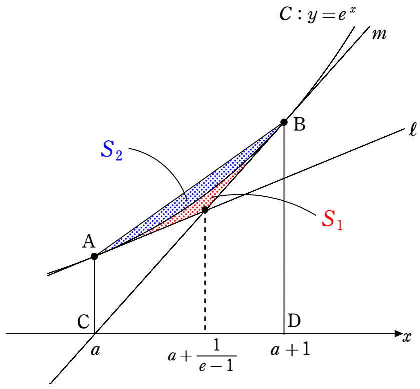
$$y=e^{a+1}(x-a)$$

これら 2 式を連立して y を消去すると，

$$e^a(x-a+1)=e^{a+1}(x-a)$$

$e^a>0$ より，$x-a+1=ex-ae$

これより，$x=a+\dfrac{1}{e-1}$ で，これが ℓ，m の交点の x 座標である。



$$\begin{aligned}S_2&=(\text{台形 ACDB の面積})-\int_a^{a+1} e^x\,dx\\&=\frac{1}{2}(e^a+e^{a+1})\cdot 1-\Big[e^x\Big]_a^{a+1}\\&=\frac{1}{2}e^a(e+1)-e^a(e-1)\\&=\frac{1}{2}e^a\{(e+1)-2(e-1)\}\\&=\frac{1}{2}e^a(3-e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_1&=\int_a^{a+1} e^x-\int_a^{a+\frac{1}{e-1}}\{e^a(x-a+1)\}\,dx-\int_{a+\frac{1}{e-1}}^{a+1}\{e^{a+1}(x-a)\}\,dx\\&=\Big[e^x\Big]_a^{a+1}-e^a\left[\frac{1}{2}(x-a+1)^2\right]_a^{a+\frac{1}{e-1}}-e^{a+1}\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_{a+\frac{1}{e-1}}^{a+1}\\&=e^a(e-1)-\frac{e^a}{2}\left\{\left(\frac{1}{e-1}+1\right)^2-1^2\right\}-\frac{e^{a+1}}{2}\left\{1^2-\left(\frac{1}{e-1}\right)^2\right\}\\&=\frac{e^a(e^2-3e+1)}{2(e-1)}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\dfrac{e^a(e^2-3e+1)}{2(e-1)}}{\dfrac{1}{2}e^a(3-e)}=\frac{e^2-3e+1}{(e-1)(3-e)}$$

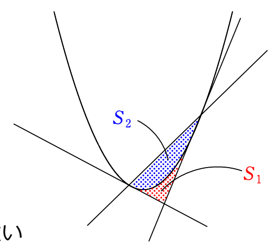
となり，$\dfrac{S_1}{S_2}$ は a の値によらない定数である。

【総括】

計算は億劫ですが，逆に言えば，計算するだけなので，試験場では確保を優先したいタイプの問題でしょう。

右の図のように放物線にも

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{2}$ という性質があります。



（放物線の場合，$(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ という一般の接点に対して成立するより強い性質です。）

本問は同じ下に凸の基本関数である $y=e^x$ についても同じ構図を考えてみたらどうなるだろうかという問題でした。