a を実数の定数とし，e は自然対数の底とする。$f(x)=e^x(x-a-1)$ について，$y=f(x)$ と x 軸との交点を A とし，A における $y=f(x)$ の接線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を a を用いて表せ。

(2) ℓ と曲線 $y=\log(px+q)$ が点 A で接しているとき，p，q の値をそれぞれ a を用いて表せ。

(3) ℓ と曲線 $y=e^{bx+c}$ が a の値に関わらず常に接するとき，定数 b，c の値を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) **今回の** $y=f(x)$ **の** x **切片は** $x=a+1$ **ですから，** A $(a+1,\ 0)$ **です。**

$f'(x)=e^x(x-a)$ **を得ますから，**

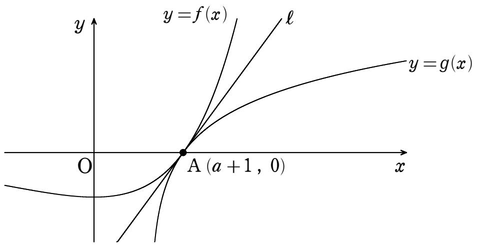
接線の傾きは $f'(a+1)=e^{a+1}$

通過点 $(a+1,\ 0)$

として，接線の式を立式すればよいでしょう。

(2) $g(x)=\log(px+q)$ **とします。**

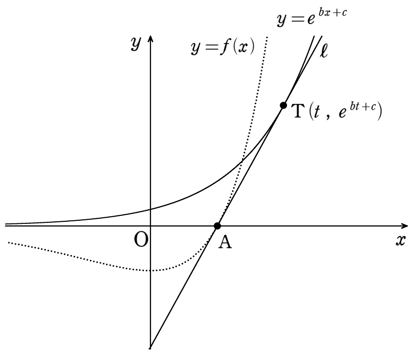
A **において** $y=f(x)$ **と** $y=g(x)$ **が接点を共有している状態です。**



よって，立てるべき式は $\begin{cases} g(a+1)=f(a+1)\ (=0) \\ g'(a+1)=f'(a+1) \end{cases}$

すなわち $\begin{cases} \log\{p(a+1)+q\}=0 \\ \dfrac{p}{p(a+1)+q}=e^{a+1} \end{cases}$ **という式です。**

(3)



今度は接点を T$(t,\ e^{bt+c})$ **と設定し，そこでの接線が** ℓ **と一致するという翻訳をしていきます。**

変動パラメータは t，a **ですが，**t，a **は従属です。**
（a **を動かすことにより，接点**（t）**が決まる**）

最終的に a **についての恒等式と見ることは見据えておきましょう。**
そうなると，t **を消去したいという気持ちが出てきます。**

【解答】

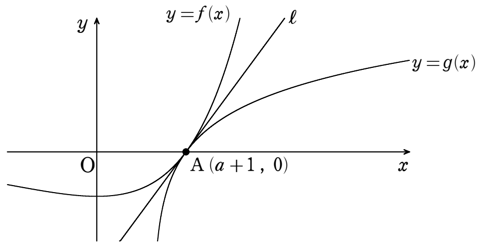
(1) $f'(x)=e^x(x-a-1)+e^x\cdot 1$
$\quad\quad =e^x(x-a)$

また，$f(x)=0$ となる x は $x=a+1$ であり，A $(a+1,\ 0)$

$f'(a+1)=e^{a+1}$ であるため，ℓ の式は

$y=e^{a+1}\{x-(a+1)\}$，すなわち $y=e^{a+1}x-e^{a+1}(a+1)$ …答

(2)



$g(x)=\log(px+q)$ とすると，$g'(x)=\dfrac{p}{px+q}$

ℓ と $y=g(x)$ が $(a+1,\ 0)$ で接しているとき，

$$\begin{cases} g(a+1)=f(a+1)\ (=0) \\ g'(a+1)=f'(a+1) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \log\{p(a+1)+q\}=0 \quad \cdots ① \\ \dfrac{p}{p(a+1)+q}=e^{a+1} \quad \cdots ② \end{cases}$$

① より，$p(a+1)+q=1$ …①′

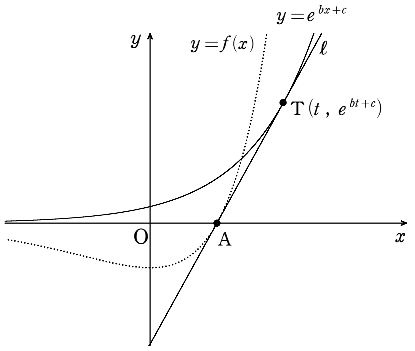
これを ②′ に代入し $\dfrac{p}{1}=e^{a+1}$

よって，$p=e^{a+1}$ …答

また，このとき ①′ より，$e^{a+1}(a+1)+q=1$

ゆえに，$q=1-e^{a+1}(a+1)$ …答

(3)　$y=e^{bx+c}$ 上の点 $\mathrm{T}(t\,,\,e^{bt+c})$ で ℓ と $y=e^{bx+c}$ が接しているときを考える。



$y=e^{bx+c}$ に対して $y'=be^{bx+c}$ であるから，T における接線の式は

$$y=be^{bt+c}(x-t)+e^{bt+c}$$

すなわち，$y=be^{bt+c}x-e^{bt+c}(bt-1)$

これが $\ell:y=e^{a+1}x-e^{a+1}(a+1)$ と一致するので，

$$\begin{cases} e^{a+1}=be^{bt+c} & \cdots ③ \\ e^{a+1}(a+1)=e^{bt+c}(bt-1) & \cdots ④ \end{cases}$$

③ を ④ に代入し

$$be^{bt+c}(a+1)=e^{bt+c}(bt-1)$$

$e^{bt+c}>0$ より，$b(a+1)=bt-1$

③ より，$b>0$ だから，$t=\dfrac{ab+b+1}{b}$

【戦略】で述べた
t を消したい
という気持ちの現れです

これを ③ に代入すると，

$$\begin{aligned} e^{a+1}&=be^{b\cdot\frac{ab+b+1}{b}+c} \\ &=b\cdot e^{ab+b+1+c} \\ &=e^{\log b}\cdot e^{ab+b+1+c} \\ &=e^{ab+b+1+c+\log b} \end{aligned}$$

よって，

$$a+1=ab+b+1+c+\log b$$

これを a について整理すると

$$(b-1)a+b+c+\log b=0$$

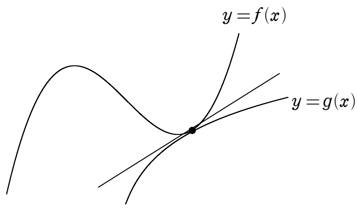
これが任意の実数 a に対して成立するので

$$\begin{cases} b-1=0 \\ b+c+\log b=0 \end{cases}$$

これら 2 式から $b=1,\ c=-1$ …㊎

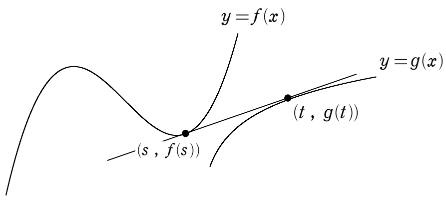
【総括】

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が接している（接点を共有している）とき



$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が共通接線をもっている（接点を共有しない）とき



$(s\,,\,f(s))$ における接線 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$
$(t\,,\,g(t))$ における接線 $y=g'(t)(x-t)+g(t)$
が一致する。

という翻訳が基本になります。

(3) は法絡線をテーマに作問しましたが，そのような知識的な側面がなくても解くことができるように配慮したつもりです。

接点を設定し，それが ℓ と同一の直線だと翻訳することは決して無茶な要求ではなく，むしろ方針としては定番の考え方とも言えるでしょう。

ただし，最後の恒等式の処理は差がつくと思われます。

b を $e^{\log b}$ と見なければならない場面も登場し，対数の定義もしっかりと押さえ，指数と対数を自在に変形する力も求められます。