a を実数の定数とし，

$$f(x)=x^3+3x^2+a^2x+a$$

とする。

$f(x)$ が極大値，極小値をとるとき，次の問に答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上にない点 $(1, k)$ から $y=f(x)$ に 3 本の接線が引けるとき，k のとり得る値の範囲を a を用いて表せ。

(3) (2) のとき，$(1, k)$ から引いた 3 本の接線の傾きを m_1，m_2，m_3 とする。$m_1+m_2+m_3$ の値を最小とするような a の値を求め，その最小値を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

(1) **$f'(x)$ が符号変化を起こせばよく，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいことになります。**

(2) **$(t, f(t))$ における接線の式を立てると**

$$y=(3t^2+6t+a^2)x-2t^3-3t^2+a$$

で，それが $(1, k)$ を通るので

$$k=(3t^2+6t+a^2)-2t^3-3t^2+a \iff k=-2t^3+6t+a^2+a \quad \cdots(*)$$

という式を得ます。

$(*)$ から得られる t が，$(1, k)$ を通る接線の接点の x 座標を与えるので $(*)$ という t の 3 次方程式が相異なる 3 つの実数解をもつための k の範囲を求めればよいことになります。

(3) **$(*)$ で得られる 3 つの実数解を t_1，t_2，t_3 としたときの接線の傾きは $f'(t_1)$，$f'(t_2)$，$f'(t_3)$ ですから**

$$\begin{cases} m_1=f'(t_1)=3t_1^2+6t_1+a^2 \\ m_2=f'(t_2)=3t_2^2+6t_2+a^2 \\ m_3=f'(t_3)=3t_3^2+6t_3+a^2 \end{cases}$$

と設定できます。

これにより，

$$m_1+m_2+m_3=3(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+6(t_1+t_2+t_3)+3a^2$$

と，対称式となるため，元々の t_1，t_2，t_3 の出どころである 3 次方程式 $(*)$ から解と係数の関係を用いて処理していけます。

【解答】

(1) $f'(x)=3x^2+6x+a^2$

$f(x)$ が極大値，極小値をとるので，$f'(x)$ が正から負，負から正へ符号変化をおこせばよい。

$y=f'(x)$ が下に凸の放物線であることを考えると，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよい。

ゆえに，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=3^2-3a^2>0$

これを解き，$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ …答

(2) 点 $(t, f(t))$ における接線の式は

$$y=(3t^2+6t+a^2)(x-t)+t^3+3t^2+a^2t+a$$

整理すると，$y=(3t^2+6t+a^2)x-2t^3-3t^2+a$

これが $(1, k)$ を通るので，

$$k=(3t^2+6t+a^2)-2t^3-3t^2+a \iff k=-2t^3+6t+a^2+a \quad \cdots(*)$$

$g(t)=-2t^3+6t+a^2+a$ とおく。

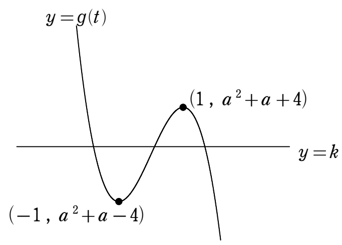
接線の本数と接点の個数は 1 対 1 に対応し，接線の本数が 3 本となるとき，t についての 3 次方程式 $(*)$ が相異なる 3 つの実数解をもてばよい。

すなわち，$y=g(t)$ と，$y=k$ のグラフが相異なる 3 つの共有点をもてばよい。

$y=g(t)$ のグラフについて

$g'(t)=-6t^2+6$ であり，増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	a^2+a-4	$\nearrow$	a^2+a+4	$\searrow$



よって，求める k の範囲は $a^2+a-4<k<a^2+a+4$ …答

※ $(1, k)$ は $y=f(x)$ 上の点ではないので $k \neq f(1)$，すなわち $k \neq a^2+a+4$ であるが，これを満たしている。

(3) t_1, t_2, t_3 は，(*)，すなわち，$2t^3-6t+k-a^2-a=0$ の相異なる3つの実数解であり，解と係数の関係から

$$t_1+t_2+t_3=0 \ , \ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-3$$

を満たしている。

ここで，$m_i=f'(t_i)$（$i=1, 2, 3$）と表せるため

$$\begin{aligned}m_1+m_2+m_3&=(3t_1^2+6t_1+a^2)+(3t_2^2+6t_2+a^2)+(3t_3^2+6t_3+a^2)\\&=3(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+6(t_1+t_2+t_3)+3a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_1^2+t_2^2+t_3^2&=(t_1+t_2+t_3)^2-2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)\\&=0^2-2\cdot(-3)\\&=6\end{aligned}$$

よって，$m_1+m_2+m_3=3\cdot6+6\cdot0+3a^2$
$=3a^2+18$

(1) より，$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ において，$m_1+m_2+m_3$ は
$a=0$ のとき最小値 18 をとる。… 答

【総括】

(1)，(2) は基本中の基本で，(3) のオチに向けた前振り的な位置づけの問題です。

(3) については，(*) の解を t_1, t_2, t_3 としたときに

$$m_i=f'(t_i) \ (i=1, 2, 3)$$

となることを看破できれば，キレイに解と係数の関係と結びつきます。