平面上に $\triangle\mathrm{OAB}$ があり，

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

を満たしている。

また，$\triangle\mathrm{PAB}$ の重心が O となるように点 P をとる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値，及び $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。

(3) 点 Q が次の 2 つの条件 (i)，(ii) を満たしている。

(i) 点 Q は $\triangle\mathrm{PAB}$ の内部にある。

(ii) 点 O は $\triangle\mathrm{QAB}$ の内部にある。

このとき，点 Q が動くことができる部分の面積を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

(1) **内積については定義より $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$ で片付きます。**

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ **については余弦定理でもよいですが，**

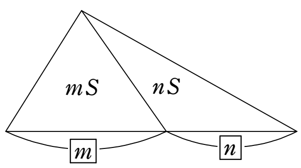
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

という 2 乗展開によって出すのがよいでしょう。

ベクトルの 2 乗展開と余弦定理は本質的に同じことです。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$ **ですから，** $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}-\vec{b}$ **と即答です。**

$\triangle\mathrm{PAB}$ **の面積については，基準となる** $\triangle\mathrm{OAB}$ **との面積比をとらえることにより計算すればよいでしょう。**



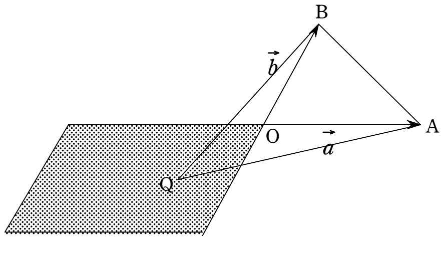
というような，高さが共通の三角形の面積比について

面積比＝底辺比

という見方が基本です。

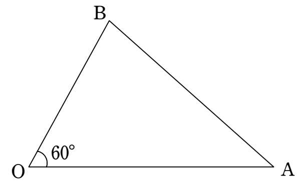
(3) **P の場所が (2) から特定されていますから，条件 (i) については困ることはないでしょう。**

問題は条件 (ii) ですが，



というように，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で張られる斜交座標の第 3 象限に Q が存在すると翻訳できれば，あとは手なりに処理できます。

【解答】



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}$

$=3$ …答

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2-2\cdot 3+2^2$

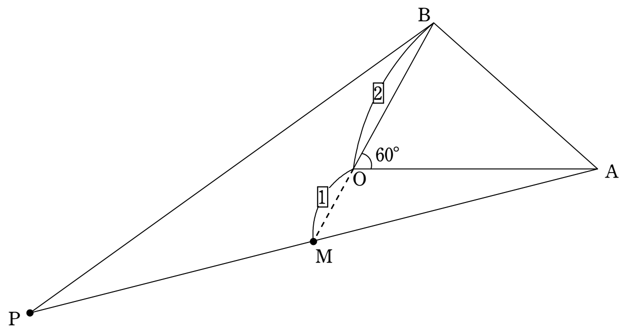
$=7$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ …答

(2) $\triangle\mathrm{PAB}$ の重心が O なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$

ゆえに，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=-\vec{a}-\vec{b}\ \text{…答}$$



線分 AP の中点を M とする。

$\triangle\mathrm{OAB}=S$ とすると，$\dfrac{\triangle\mathrm{OMA}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}$（∵ 重心の性質）

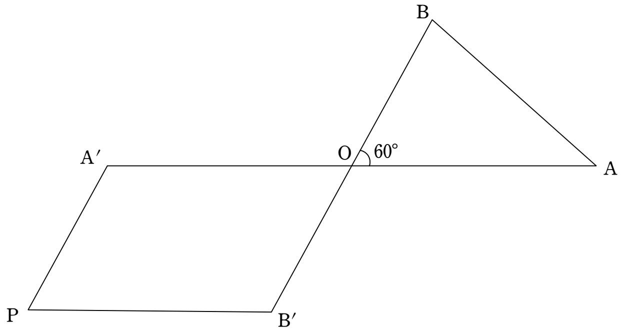
よって $\triangle\mathrm{OMA}=\dfrac{1}{2}S$

$$\triangle\mathrm{BPM}=\triangle\mathrm{BMA}$$
$$=S+\frac{1}{2}S$$
$$=\frac{3}{2}S$$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\triangle\mathrm{BPM}\times 2$$
$$=3S$$

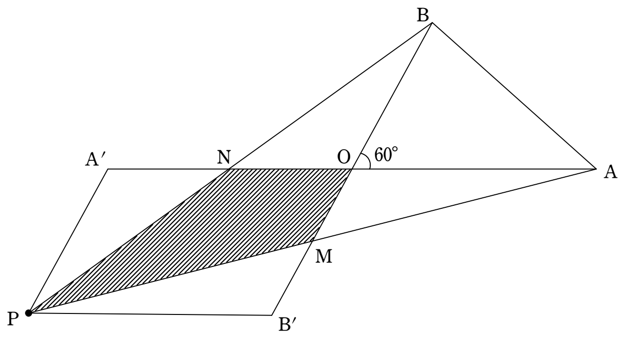
$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より，$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ …答

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\vec{b}$ となる点 A′，B′ に対して (2) の結果から
四角形 OA′PB′ は (図 1) のような平行四辺形となる。



(図 1)

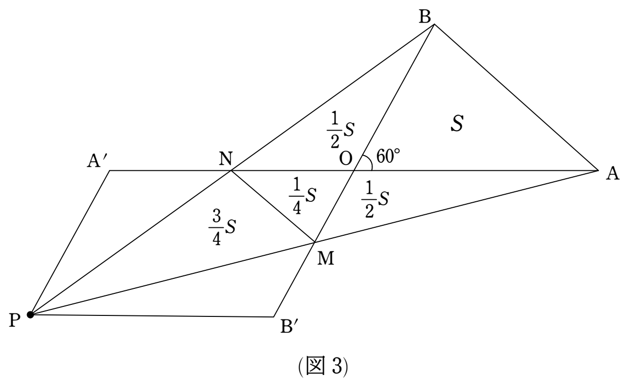
よって，条件 (i)，(ii) を満たす点 Q の存在範囲は (図 2) の斜線部



(図 2)

線分 BP の中点を N とする。

△OAB$=S$ とすると，各々の面積の状況は (図 3) のようになる。



(図 3)

求める面積は

$$\frac{3}{4}S+\frac{1}{4}S=S$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \cdots 答$$

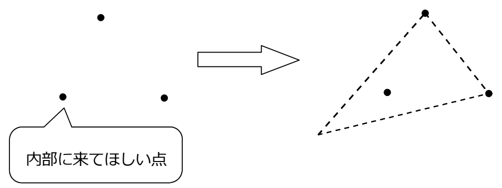
【総括】

三角形が決まる → 三角形の内部

という頭の流れは問題ないでしょう。

今回の条件 (ii) のように

2 頂点と内部に来てほしい点が決まる → 三角形の残りの頂点を決める



という流れについて，翻訳の仕方の部分は差が付くと思います。