$\cos x+\cos y=1$ のとき，$\sin x+\sin y$ の最大値 $u$ と最小値 $v$ を求めよ。
＜ ’94 東京理科大 ＞

**【戦略 1】**

**従属 2 変数関数の最大・最小なので，文字消去を狙っていきたいですが，三角関数の服を着た変数を消去することは容易ではありません。**

**そこで，文字消去が困難なときの有力手段である「逆像法」で仕留めることを考えます。**

**例えば，**$\sin x+\sin y=1$ **になれるかということを検証したければ**

$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=1\end{cases}$ **が同時に成り立つことができるか？**

**という連立方程式が解をもつかどうかという問題に帰着します。**

**ここからは，**$\cos y=1-\cos x$，$\sin y=1-\sin x$ **として**

$$\cos^2 y+\sin^2 y=1$$

**に代入してやれば，**$(1-\cos x)^2+(1-\sin x)^2=1$

**すなわち，**$\sin x+\cos x=1$ **となり，ここから，**$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **で，**$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2m\pi$，$\frac{3}{4}\pi+2m\pi$

**すなわち** $x=2m\pi$，$\frac{\pi}{2}+2m\pi$ $(m$ **は整数**$)$ **となり，**$x$ **はきちんと存在することが確認できます。**

**つまり，冒頭の連立方程式は解をもつことになり，**$\sin x+\sin y=1$ **は実現可能ということになります。**

$\sin x+\sin y=2$ **になるかな？** $\sin x+\sin y=-\frac{1}{3}$ **になるかな？……**

**としらみつぶしに考え，なり得る値の範囲が得られれば，実質最大最小が分かります。**

**そこで，**

$\sin x+\sin y=k$ **になるかな？　なれるとしたらどんな** $k$ **？**

**と文字の力を借りて，しらみつぶすわけです**

【解 1】

$\sin x+\sin y=k$ とすると，$\begin{cases}\cos x+\cos y=1 & \cdots ①\\ \sin x+\sin y=k & \cdots ②\end{cases}$

①，② より，$\begin{cases}\cos y=1-\cos x\\ \sin y=k-\sin x\end{cases}$

$\cos^2 y+\sin^2 y=1$ であるため，

$$(1-\cos x)^2+(k-\sin x)^2=1$$

これを整理すると，$k\sin x+\cos x=\frac{k^2+1}{2}$

$$\sqrt{k^2+1}\,\sin(x+\alpha)=\frac{k^2+1}{2}$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}$$

$$\left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\text{，}\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)$$

これを満たす実数 $x$ が存在するためには

$$\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}\leqq 1$$

これより，$k^2+1\leqq 4$ で，$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ であり，これが $k$ としてとり得る値の範囲である。

よって，最大値 $u=\sqrt{3}$，最小値 $v=-\sqrt{3}$ …答

**【戦略 2】**

**経験に基づく発想と言わざるを得ませんが，**

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=k\end{cases}$$

**を，**

$$\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$$

**というベクトルの和として見ることで，視覚的に $k$ の範囲を求めることもできます。**

【解 2】部分的別解

（ $\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=k\end{cases}$ という連立方程式が実数解をもつための $k$ の条件を

求めるという方針は【解 1】と同じ）

$$\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$$

であり，ここで，$XY$ 座標平面における原点 O に対して

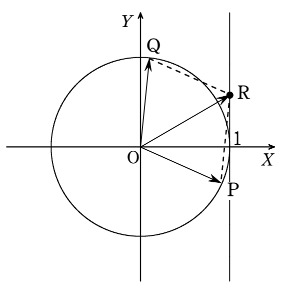
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$$

とおく。

P，Q は円 $X^2+Y^2=1$ 上の点であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，及び P，Q は円 $X^2+Y^2=1$ 上，点 R が直線 $X=1$ 上の点であることに注意しながら，$k$ のとり得る範囲を求める。

$$1\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=2$$




よって，$1\leqq\sqrt{1+k^2}\leqq 2$ であり，$1\leqq 1+k^2\leqq 4$

これより，$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ であり，これが $k$ のとり得る値の範囲である。

よって，最大値 $u=\sqrt{3}$，最小値 $v=-\sqrt{3}$ …答

**【戦略 3】**

$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=k\end{cases}$ **を 2 乗して辺々加えるという方針も目に付きます。**

**ただ，この場合 2 乗することで同値性が失われるため，必要性と十分性について整理して記述しなければなりません。**

【解 3】

$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=k\end{cases}$ より，$\begin{cases}\cos^2x+2\cos x\cos y+\cos^2y=1\cdots(\text{ア})\\ \sin^2x+2\sin x\sin y+\sin^2y=k^2\cdots(\text{イ})\end{cases}$

(ア)+(イ) より，$1+2\cos(x-y)+1=k^2+1$

$$\cos(x-y)=\frac{k^2-1}{2}$$

これを満たす実数 $x$，$y$ が存在するためには

$$-1\leqq\frac{k^2-1}{2}\leqq 1$$

すなわち，$-1\leqq k^2\leqq 3$ であることが必要である。

左側の不等号は成立するため，$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ を得る。

逆に，$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ のとき

$x-y=\alpha$ $\left(\text{ただし }\cos\alpha=\dfrac{k^2-1}{2}\right)$ となる実数 $\alpha$ が存在する。…(☆)

また，(ア)−(イ) より

$$\cos 2x+2\cos(x+y)+\cos 2y=1-k^2$$

さらに，一般に $\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)$ であるため

$$2\cos(x+y)\cos(x-y)+2\cos(x+y)=1-k^2$$

$$(k^2-1)\cos(x+y)+2\cos(x+y)=1-k^2$$

$$(k^2+1)\cos(x+y)=1-k^2$$

$$\cos(x+y)=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ のとき，$-1\leqq\cos(x+y)\leqq 1$ であるため，

$x+y=\beta$ $\left(\text{ただし }\cos\beta=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\right)$ となる実数 $\beta$ が存在する。…(★)

(☆)，(★) より，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ という実数として $x$，$y$ が存在する。

以上から，$k$ のとり得る値の範囲は $-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ であり，

最大値 $u=\sqrt{3}$，最小値 $v=-\sqrt{3}$ …答

【総括】

逆像法の路線はしっかりと睨みたいところです。

逆像法で処理することをクリアーしたうえで，次は三角関数の連立方程式の運用力という「分野別の力」が問われてきます。

具体的な解が出てくるような $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$ のような「連立方程式を実際に解く」ということにフォーカスを当てた問題なら，煮るなり焼くなりすればよいですが，

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \sin x + \sin y = k \end{cases}$$

という文字を含んだ連立方程式が実数解をもつかどうかというセンシティブな話題になるため，辺々 2 乗して同値性が崩れる【解 3】の路線は避けたいのですが，そもそも同値性が崩れることにすら気が付かない受験生も多いかもしれません。