m，n を正の整数とし，a，b，c を実数とするとき，次の問に答えよ。

(1) 次の定積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\ \sin nx\ dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\ \sin mx\ dx$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x-x)^2\,dx$ とおく。

I を最小にするような a，b，c の値と I の最小値を求めよ。

＜ '94 九州大 ＞

【戦略】

(1) (i) **積分計算においては積の形より和の形がいいので積和公式にもちこみます。**

その際，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}dx$ **となりますが細かなことを抜きにすれば**

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_0^{\pi}$$

となりますが，分母の $m-n$ **が** 0 **か否かという場合分けの必要性に気が付くでしょう。**

(ii) **部分積分で** x **を消す定番の形です。**

(2) **被積分関数を展開したときに (1) で計算した形が続々と現れます。**

(1) を存分に利用して計算すれば

$$I=\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2+\frac{\pi}{2}c^2-2\pi a+\pi b-\frac{2\pi}{3}c+\frac{1}{3}\pi^3$$

と計算できます。

これら a，b，c **は独立 3 変数なので，厳密には予選決勝法で仕留めていけばよいですが，この程度であれば，平方完成を一気にしてしまい**

$$I=\frac{\pi}{2}(a-2)^2+\frac{\pi}{2}(b+1)^2+\frac{\pi}{2}\left(c-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\pi^3-\frac{49}{18}\pi$$

として，(実数)$^2\geqq 0$ ということを利用して処理すればよいでしょう。

【解答】

(1) (i) [1]：$m=n$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int_0^{\pi}\sin^2 mx\ dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

[2]：$m\neq n$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_0^{\pi}\\&=0\end{aligned}$$

以上から，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\ \sin nx\ dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (m=n\text{ のとき})\\ 0 & (m\neq n\text{ のとき})\end{cases}$ …㊂

(ii) $$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int_0^{\pi}x\left(-\frac{1}{m}\cos mx\right)'dx\\&=\left[-\frac{1}{m}x\cos mx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x'\left(-\frac{1}{m}\cos mx\right)dx\\&=-\frac{\pi}{m}(-1)^m+\frac{1}{m}\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_0^{\pi}\\&=-\frac{\pi}{m}(-1)^m\end{aligned}$$

以上から，$\displaystyle\int_0^{\pi}x\ \sin mx\ dx=-\frac{\pi}{m}(-1)^m$ …㊂

(2) $(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x-x)^2$

$$\begin{aligned}&=a^2\sin^2 x+b^2\sin^2 2x+c^2\sin^2 3x+x^2\\&\quad+2ab\sin x\sin 2x+2ac\sin x\sin 3x-2a\sin x\\&\quad+2bc\sin 2x\sin 3x-2bx\sin 2x\\&\quad-2cx\sin 3x\end{aligned}$$

(1) の結果から

$$\begin{aligned}I&=a^2\cdot\frac{\pi}{2}+b^2\cdot\frac{\pi}{2}+c^2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\pi^3\\&\quad+0+0-2a\pi\\&\quad+0-2b\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1)^2\\&\quad-2c\cdot\left\{-\frac{\pi}{3}(-1)^3\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2+\frac{\pi}{2}c^2-2\pi a+\pi b-\frac{2\pi}{3}c+\frac{1}{3}\pi^3$$

$$=\frac{\pi}{2}(a-2)^2+\frac{\pi}{2}(b+1)^2+\frac{\pi}{2}\left(c-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\pi^3-\frac{49}{18}\pi$$

a，b，c は実数なので，$a=2$，$b=-1$，$c=\dfrac{2}{3}$ のとき

I は最小値 $\dfrac{1}{3}\pi^3-\dfrac{49}{18}\pi$ をとる。…㊂

【総括】

類題を挙げればキリがないぐらいよく出題される話題です。

今回の $\int_0^{\pi} \sin mx \ \sin nx \ dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \fallingdotseq n \text{ のとき}) \end{cases}$ という結果，

特に，

$$m \fallingdotseq n \text{ のとき } \int_0^{\pi} \sin mx \ \sin nx \ dx = 0$$

という結果は，三角関数の直交性と呼ばれる性質です。

「関数が直交？どういうこと？」と思うかもしれませんが，大学以降ではベクトルの概念が広がります。
(ざっくり言うと和，実数倍についてが定義できるものはベクトルと見なします。関数についても和や実数倍が定義できるのでベクトルの一種とみなすわけです。)

このようにベクトルを拡張して考えるわけですが，それにともなって内積についても拡張して定義します。

ベクトル空間における内積の定義については大学以降の線形代数で詳しくやることになると思いますから，ここではあまり深入りはしません。

ここでは皆さんが知っている定積分も内積の一種と考えることができ，それが $\int_0^{\pi} \sin mx \ \sin nx \ dx = 0$ を三角関数の直交性と呼ぶゆえんであるということぐらいに留めておきます。

また，$\int_0^{\pi} \sin mx \ \cos nx \ dx$ や，$\int_0^{\pi} \cos mx \ \cos nx \ dx$ についても同様の直交性があります。

なお，今回の三角関数の直交性は，様々な関数を三角関数の和で表現する

フーリエ級数展開

に応用され，様々な理工学分野で活用されています。