三角関数の対称式【類題】

長方形 ABCD の頂点 A から対角線 BD に垂線を引き，BD との交点を P とする。

次に，点 P から辺 BC，CD のそれぞれに引いた垂線の長さを x，y とする。

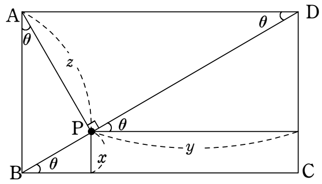
対角線 BD の長さを a，線分 AP の長さを z とするとき，

(1)　$\angle \mathrm{ADB}=\theta$ とするとき，x，y を a，θ で表せ。

(2)　a が一定のとき，$x+y+z$ のとり得る値の範囲を求めよ。

＜ '89 神戸大 改 ＞

【戦略】



例題同様，直角三角形が沢山あり，目移りしそうです。

$$\begin{cases} x=\mathrm{BP}\sin\theta \\ \mathrm{BP}=\mathrm{AB}\sin\theta \\ \mathrm{AB}=a\sin\theta \end{cases}$$

という関係式に注目すると，ドミノ倒しのように x が求まります。

y **についても** $\begin{cases} y=\mathrm{DP}\cos\theta \\ \mathrm{DP}=\mathrm{AD}\cos\theta \\ \mathrm{AD}=a\cos\theta \end{cases}$ **に注目すると，y が順次求まります。**

(2)　(1) **が正しく求まれば，** $\begin{cases} x=a\sin^3\theta \\ y=a\cos^3\theta \end{cases}$ **となっています。**

残る z については， $z=\mathrm{AB}\cos\theta$ **ですから**

$$z=a\sin\theta\cos\theta$$

となり， $x+y+z=a(\sin^3\theta+\cos^3\theta+\sin\theta\cos\theta)$

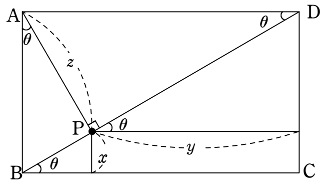
という式が立式できます。

もちろん， sin，cos **の対称式であることを看破して，**

$$t=\sin\theta+\cos\theta$$

とおいて話を進めていきましょう。

【解答】



(1)　$\begin{cases} x=\mathrm{BP}\sin\theta \\ \mathrm{BP}=\mathrm{AB}\sin\theta \\ \mathrm{AB}=a\sin\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} x&=\mathrm{BP}\sin\theta \\ &=\mathrm{AB}\sin^2\theta \\ &=a\sin^3\theta \end{aligned}$$

一方，$\begin{cases} y=\mathrm{DP}\cos\theta \\ \mathrm{DP}=\mathrm{AD}\cos\theta \\ \mathrm{AD}=a\cos\theta \end{cases}$ であるため，

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{DP}\cos\theta \\ &=\mathrm{AD}\cos^2\theta \\ &=a\cos^3\theta \end{aligned}$$

以上から，$x=a\sin^3\theta$，$y=a\cos^3\theta$　…答

(2)　$z=\mathrm{AB}\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta$

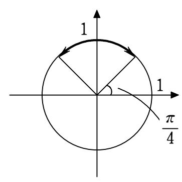
ゆえに，$x+y+z=a(\sin^3\theta+\cos^3\theta+\sin\theta\cos\theta)$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

すなわち，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ を得る。

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，すなわち

$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ なので



$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

つまり，$1<t\leqq\sqrt{2}$

このとき，

$$\begin{aligned} \sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta) \\ &=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right) \\ &=\frac{-t^3+3t}{2} \end{aligned}$$

よって，
$$\begin{aligned} x+y+z&=a\left\{-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right\} \\ &=\frac{a}{2}(-t^3+t^2+3t-1) \end{aligned}$$

$f(t)=-t^3+t^2+3t-1$　$(1<t\leqq\sqrt{2})$ とおくと

$f'(t)=-3t^2+2t+3$

t	(1)	$\cdots$	$\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(2)	$\nearrow$	$\dfrac{2+20\sqrt{10}}{27}$	$\searrow$	$1+\sqrt{2}$

$f(1)<f(\sqrt{2})$ であることに注意すると

$$2<f(t)\leqq\frac{2+20\sqrt{10}}{27}$$

よって，$x+y+z\left(=\dfrac{a}{2}f(t)\right)$ のとり得る値の範囲は

$$a<x+y+z\leqq\frac{1+10\sqrt{10}}{27}a \quad \cdots 答$$

【総括】

「言われたから $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく」というレベルから

「自分で $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく」というレベルに昇華しましょう。

なお，$f\left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$ を計算するにあたっては，以下の工夫をします。

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ とおきます。

(この値の出どころは元々 $-3t^2+2t+3=0$ という 2 次方程式であることに注意すれば，$-3\alpha^2+2\alpha+3=0$ を満たします)

$f(t)$ を $-3t^2+2t+3$ で割り，商と余りを計算することで

$$f(t)=(-3t^2+2t+3)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\right)+\frac{20}{9}t-\frac{2}{3}$$

が言えます。

なので

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=(-3\alpha^2+2\alpha+3)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\right)+\frac{20}{9}\alpha-\frac{2}{3}\\&=\frac{20}{9}\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}\\&=\frac{2+20\sqrt{10}}{27}\end{aligned}$$

を得ます。

この工夫は微分法における極値計算の常套手段の一つです。