座標平面の x 軸の正の部分にある点 A と，y 軸の正の部分にある点 B を考える。原点 O から点 A，B を通る直線 ℓ に下ろした垂線と，直線 ℓ との交点を P とする。

OP＝1 であるように点 A，B が動くとき，次の問いに答えよ。

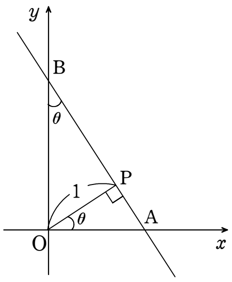
(1)　$\theta=\angle\mathrm{AOP}$ とするとき，$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

(2)　$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$ の最小値を求めよ。

＜ '09 琉球大 ＞

【戦略 1】

(1)　**状況を図示してみると**



といった状況です。

直角三角形が沢山あり，目移りしそうですが，OP＝1 という長さの情報を含んでいる △OAP，△OBP に注目することで OA，OB は解決します。

AB については，AB を含む直角三角形は △OAB なのでそこに注目すれば手なりに解決します。

(2)　**(1) が正しく計算できれば，**$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$
という式が得られ，この三角関数についての最小値を求めることになります。

もちろん，理系の人であれば微分という選択肢も考えられますが，今回の相手が $\sin\theta$，$\cos\theta$ についての対称式であることに注目すると

$$t=\sin\theta+\cos\theta$$

という置き換えが有効にはたらきます。

和を t とおくことで，両辺 2 乗すると

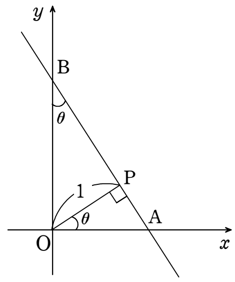
$$\begin{aligned}t^2&=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

から，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ **と，積も t を用いて表せます。**

$\sin$，$\cos$ の対称式はこれらの基本対称式 $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ で表せるため，結局は t で表せることになります。

【解 1】

(1)



直角三角形 OAP に注目して　$\cos\theta=\dfrac{1}{\mathrm{OA}}$　$\therefore\ \mathrm{OA}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

直角三角形 OBP に注目して $\sin\theta=\dfrac{1}{\mathrm{OB}}$　$\therefore\ \mathrm{OB}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

直角三角形 OAB に注目して，$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}$

これより，
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\frac{\mathrm{OA}}{\sin\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}&=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

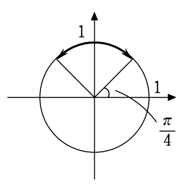
(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta\ \left(=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ とおく。

このとき，
$$\begin{aligned}t^2&=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

つまり，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

(1) の結果から，
$$\begin{aligned}\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}&=\frac{t-1}{\frac{t^2-1}{2}}\\&=\frac{2}{t+1}\ \cdots①\end{aligned}$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるため，$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ なので



$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

つまり，$1<t\leqq\sqrt{2}$ …②

② の範囲で ① の最小値を求めればよく，$t=\sqrt{2}$ のとき $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$ は最小となる。

以上から，求める最小値は $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}\ \left(=2(\sqrt{2}-1)\right)$ …答

【戦略 2】(1) について

$\triangle$OAB の面積に注目し，$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{OP}$

と，2 通りの見方をすることで，OA，OB が得られたら AB も得ることができることになります。

【解 2】(1) の部分的別解

※ $\mathrm{OA}=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$\mathrm{OB}=\dfrac{1}{\sin\theta}$ を得るところまでは同じ

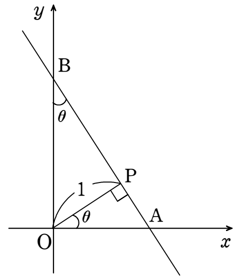
$\triangle$OAB の面積に注目すると，$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{OP}$

すなわち $\mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}=\mathrm{AB}\cdot \mathrm{OP}$

これより，$\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\mathrm{AB}\cdot 1$ であるため，$\mathrm{AB}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

（以下【解 1】に準じる）

【戦略 3】(1) について

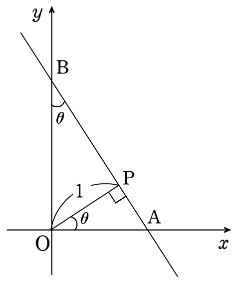


直角三角形 OAP に注目すると $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OP}}=\tan\theta$ なので，$\mathrm{AP}=\tan\theta$

直角三角形 OBP に注目すると $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BP}}=\tan\theta$ なので，$\mathrm{BP}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

ですから，$\mathrm{AB}=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ と見ることもできます。

【解 3】(1) の部分的別解



直角三角形 OAP に注目すると $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OP}}=\tan\theta$ なので，$\mathrm{AP}=\tan\theta$

直角三角形 OBP に注目すると $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BP}}=\tan\theta$ なので，$\mathrm{BP}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}\\&=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\\&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

（以下【解 1】に準じる）

【戦略 4】(2) について

三角関数の対称式と見抜き，$t=\sin\theta+\cos\theta$ という置き換えができなかった場合，微分して最小値を求めるという腕力でねじ伏せることもできます。

【解 4】(2) について

$f(\theta)=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ とおく。

$$f'(\theta)=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)\{(1+\sin\theta\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta)\}}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	最小	↗	

よって，$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$ の最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$$
$$=2(\sqrt{2}-1)\quad\cdots 答$$

【総括】

sin と cos に関する対称式に対して

$$t=\sin\theta+\cos\theta$$ （和を文字でおく）

という対応は有力な常套手段であることは確認しておきましょう。

両辺 2 乗すると $t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ で，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

と積も Get できます。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\begin{cases} x+y=\square \\ x^2+y^2=\triangle \end{cases}$ のとき，xy を求めよ。

のような，対称式の問題は定番の練習問題として単元学習の段階でやっていたと思います。

この場合，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ と見る定番のモノの見方をします。

これが三角関数となると，

$\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=t \\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \end{cases}$ のとき　$\sin\theta\cos\theta$ を t で表せ。

という問題です。

これだったら，ほとんどの人が，$\sin\theta+\cos\theta=t$ の両辺を 2 乗するでしょう。

ただ，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ はいちいち書きませんから，隠れてしまい

$\sin\theta+\cos\theta=t$ のとき $\sin\theta\cos\theta$ を t で表せ

という問題になるわけです。

両辺 2 乗するという結果だけでなく，「そりゃ 2 乗したくなるわ」というように「2 乗したくなる気持ち」が大事です。