次のふたつの方程式を考える。

$$x^2+y^2=z^2 \cdots\cdots ①,\quad s^2+t^2=u^2+1 \cdots\cdots ②$$

(1) 実数 a, b に対し，実数 a^*, b^* を

$$a^*=a+b,\quad b^*=2a+b+1$$

で定める。$(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ が ① の解ならば，
$(s,\ t,\ u)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は ② の解であることを示せ。
また，逆に $(s,\ t,\ u)=(a,\ a+1,\ b)$ が ② の解ならば，
$(x,\ y,\ z)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は ① の解であることを示せ。

(2) 方程式 ① の自然数解 $(x,\ y,\ z)$ をピタゴラス数という。
$y=x+1$ を満たすピタゴラス数を 3 組あげよ。

< '11 三重大 >

【戦略】

(1) $(s,\ t,\ u)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ **が ② の解であるということを示すには**

$$(a^*)^2+(a^*+1)^2=(b^*)^2+1$$

$$(a+b)^2+(a+b+1)^2=(2a+b+1)^2+1$$

$$b^2-2a^2-2a-1=0$$

を示すことになります。

$(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ **が ① の解であるという条件を整理すると**

$$a^2+(a+1)^2=b^2$$

ですから，目標の $b^2-2a^2-2a-1=0$ **が成り立つことが言えます。**

後半に関しても同様に，何が示せればよいかを予め整理しておき，
使ってよい条件から目標に辿り着きましょう。

【解答】では天下り的に記述します。

(2) $(x,\ y,\ z)=(3,\ 4,\ 5)$ **が題意のピタゴラス数の** 1 **つであることは即座に分かると思います。**

$(3,\ 4,\ 5)$ **が ① の解であるため，**(1) **を用いてやると**
$(3^*,\ 3^*+1,\ 5^*)$ **が ② の解となります。**

具体的には $(8,\ 9,\ 12)$ **が ② の解です。**

(1) **の結果から，**$(8^*,\ 8^*+1,\ 12^*)$**，すなわち** $(20,\ 21,\ 29)$ **が ① の解であることが分かり，**2 **組目のピタゴラス数が求まりました。**

このアルゴリズムをもう一回繰り返せば，3 **組目も見つかります。**

【解答】

(1) $(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ が ① の解であるとき

$$a^2+(a+1)^2=b^2 \cdots (ア)$$

このとき，

$$\begin{aligned}(a^*)^2+(a^*+1)^2-(b^*)^2-1&=(a+b)^2+(a+b+1)^2-(2a+b+1)^2-1\\&=b^2-2a^2-2a-1\\&=b^2-\{a^2+(a+1)^2\}\\&=0\ (\because (ア))\end{aligned}$$

よって，$(a^*)^2+(a^*+1)^2=(b^*)^2+1$ が成立する。

つまり，$(s,\ t,\ u)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は ② の解である。

一方，$(s,\ t,\ u)=(a,\ a+1,\ b)$ が ② の解であるとき

$$a^2+(a+1)^2=b^2+1\ (\Longleftrightarrow\ 2a^2+2a=b^2 \cdots (イ))$$

このとき，

$$\begin{aligned}(a^*)^2+(a^*+1)^2-(b^*)^2&=(a+b)^2+(a+b+1)^2-(2a+b+1)^2\\&=b^2-2a^2-2a\\&=0\ (\because (イ))\end{aligned}$$

よって，$(a^*)^2+(a^*+1)^2=(b^*)^2$ が成立する。

つまり，$(x,\ y,\ z)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は ① の解である。

(2) $a=3$, $b=5$ に対し，$\begin{cases}3^*=3+5=8\\5^*=2\cdot3+5+1=12\end{cases}$

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 3+1,\ 5)$ は ① の解であるため，
$(s,\ t,\ u)=(3^*,\ 3^*+1,\ 5^*)=(8,\ 9,\ 12)$ は ② の解である。

ここで，$\begin{cases}8^*=8+12=20\\12^*=2\cdot8+12+1=29\end{cases}$ であり，

$(x,\ y,\ z)=(8^*,\ 8^*+1,\ 12^*)=(20,\ 21,\ 29)$ は ① の解である。

また，$\begin{cases}20^*=20+29=49\\29^*=2\cdot20+29+1=70\end{cases}$

$(x,\ y,\ z)=(20,\ 20+1,\ 29)$ は ① の解であるため，
$(s,\ t,\ u)=(20^*,\ 20^*+1,\ 29^*)=(49,\ 50,\ 70)$ は ② の解である。

ここで，$\begin{cases}49^*=49+70=119\\70^*=2\cdot49+70+1=169\end{cases}$ であり，

$(x,\ y,\ z)=(49^*,\ 49^*+1,\ 70^*)=(119,\ 120,\ 169)$ は ① の解である。

以上から，求めるピタゴラス数 3 組として

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 4,\ 5),\ (20,\ 21,\ 29),\ (119,\ 120,\ 169)$ … 答

【総括】

思考力，発想力というよりは，読解力寄りの力が求められ，誘導の意味さえ把握できれば問題を解くこと自体は難しくはありません。

【解答】は分かりやすさ重視で，一つ一つ導出しましたが

$(x, y, z)=(a, a+1, b)$ が ① の解のとき

$(s, t, u)=(a^*, a^*+1, b^*)=(a+b, a+b+1, 2a+b+1)$ が ② の解

$$\begin{cases}(a+b)^*=(a+b)+(2a+b+1)=3a+2b+1\\(2a+b+1)^*=2(a+b)+(2a+b+1)+1=4a+3b+2\end{cases}$$

より，$(x, y, z)=(3a+2b+1, 3a+2b+2, 4a+3b+2)$ が ① の解

つまり，$(x, y, z)=(a, a+1, b)$ が ① の解のとき
$(x, y, z)=(3a+2b+1, 3a+2b+2, 4a+3b+2)$ も ① の解

と言えるため

$$(3, 4, 5)\longrightarrow(20, 21, 29)\longrightarrow(119, 120, 169)$$

と次々と導出できるでしょう。

さて，今回扱った，x，y が連続２整数となるようなピタゴラス数について少し検証してみます。

以下，原始ピタゴラス数の一般解，ペル方程式についての基礎的概要は前提の話とします。

【検証】

$x^2+y^2=z^2$ を満たすどの 2 つも互いに素な自然数 x，y，z は
互いに素な 2 つの自然数 a，b を用いて

$$\begin{cases}x=a^2-b^2\\y=2ab\\z=a^2+b^2\end{cases}\quad \text{または} \quad \begin{cases}x=2ab\\y=a^2-b^2\\z=a^2+b^2\end{cases}$$

と表されます。

本問においては，$x=y+1$ または $y=x+1$ のときを考えるわけです。

これは

$$a^2-b^2=2ab+1 \quad \text{または} \quad 2ab=a^2-b^2+1$$

すなわち

$$(a-b)^2-2b^2=1 \quad \text{または} \quad (a+b)^2-2a^2=1$$

となり，こうなるような a，b を求めていきたいわけです。

これについてはどちらも $X^2-2Y^2=1$ という構造をしています。

これはペル方程式と呼ばれる形の方程式です。

特殊解 $(X, Y)=(3, 2)$ に注目し
$$(3\pm2\sqrt{2})^n=a_n\pm b_n\sqrt{2} \quad (\text{複号同順})$$
と a_n，b_n を設定します。

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$$

ですから，

$$(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n=1$$

であり，$(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=1$，すなわち

$$a_n{}^2-2b_n{}^2=1$$

を満たすため，$(X, Y)=(a_n, b_n)$ は $X^2-2Y^2=1$ の解となります。

$$\begin{gathered}(3+2\sqrt{2})^1=3+2\sqrt{2}\\(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}\\(3+2\sqrt{2})^3=99+70\sqrt{2}\\\vdots\end{gathered}$$

なので，$(X, Y)=(3, 2), (17, 12), (99, 70), \cdots\cdots$

と $X^2-2Y^2=1$ というペル方程式の整数解が求まっていきます。

そうなると，例えば $(a-b)^2-2b^2=1$ において

$\begin{cases}a-b=3\\b=2\end{cases}$ より，$(a, b)=(5, 2)$ ですから $(x, y, z)=(21, 20, 29)$

を得ることができます。

このようにして，今回の話題である
「x，y が連続２整数となるようなピタゴラス数」
が得られていきます。