イェンゼンの不等式【例題】

(1) すべての正数 x，y と，すべての $0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 1$，$a+b=1$ にたいして次の不等式を示せ。

$$\log(ax+by) \geqq a\log x + b\log y$$

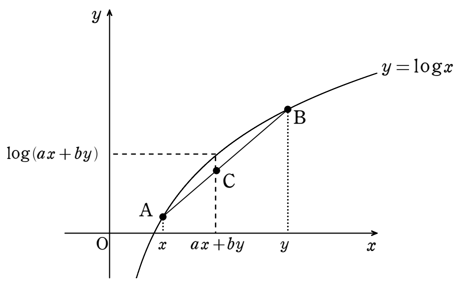
(2) すべての正数 x，y，z と，すべての $0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$a+b+c=1$ にたいして次の不等式を示せ。

$$\log(ax+by+cz) \geqq a\log x + b\log y + c\log z$$

＜ '03 和歌山県立医科大 ＞

【戦略 1】

(1)



と，A$(x, \log x)$，B$(y, \log y)$ とし，線分 AB を $b : a$ に内分する点 C の y 座標を考えるとほぼ明らかです。

視覚化の路線は見えるか見えないかという勝負になってきます。

しかも，今回の話題はそのように見えるかどうかというのは経験によるところが大きいでしょう。

細々とした $(a, b)=(0, 1)$，$(1, 0)$ のときは個別検証で潰します。

(2) **今度は (1) の利用を考えます。**

3 つの和 $a+b+c=1$ を 2 つの和と見るために

$$\underbrace{\boxed{a+b}}_{k\text{とおく}} + \boxed{c} = 1$$

と見て，$k+c=1$ としてやります。

すると，k，c を係数にもつように見たいので

$$\log(ax+by+cz) = \log\left(k \cdot \frac{ax+by}{k} + cz\right)$$

係数足して 1

と見ます。

そうなると，(1) が利用できるため

$$\log\left(k \cdot \frac{ax+by}{k} + cz\right) \geqq k\log\frac{ax+by}{k} + c\log z$$

となります。

再び log をバラすべく (1) の活用が見込み，係数 $\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k}=1$ に注目すると，

$$k\log\frac{ax+by}{k} + c\log z \geqq k\left\{\frac{a}{k}\log x + \frac{b}{k}\log y\right\} + c\log z$$
$$= a\log x + b\log y + c\log z$$

となり解決します。

【解 1】

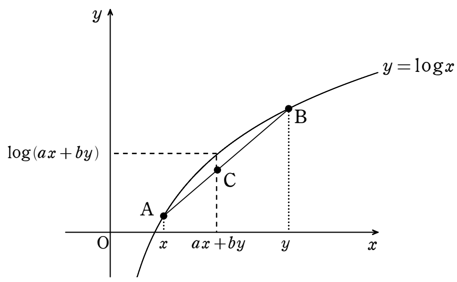
(1) $(a, b)=(0, 1)$ のとき，$\begin{cases} \log(ax+by) = \log y \\ a\log x + b\log y = \log y \end{cases}$

$(a, b)=(1, 0)$ のとき，$\begin{cases} \log(ax+by) = \log x \\ a\log x + b\log y = \log x \end{cases}$

$0<a<1$，$0<b<1$ のとき

A$(x, \log x)$，B$(y, \log y)$ とし，線分 AB を $b : a$ に内分する点を C とすると，C$\left(\dfrac{ax+by}{b+a}, \dfrac{a\log x + b\log y}{b+a}\right)$ であり，$a+b=1$ という条件から

$$\mathrm{C}(ax+by,\ a\log x + b\log y)$$



$y=\log x$ は上に凸であるため，C の y 座標に注目すると

$$\log(ax+by) \geqq a\log x + b\log y$$

が成立する。

(2) $a+b=k$ とする。このとき，条件 $a+b+c=1$ から，$k+c=1$

$k=0$ のとき，$0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 1$ という条件から $a=0$，$b=0$ となるしかない。

このとき，$c=1$ であり，$\begin{cases} \log(ax+by+cz) = \log z \\ a\log x + b\log y + c\log z = \log z \end{cases}$

となり，題意の関係式は成立する。

以下，$k>0$ のときを考える。

$$\log(ax+by+cz) = \log\left(k \cdot \frac{ax+by}{k} + cz\right) \cdots ①$$

$k+c=1$ より，(1) から，

$$\log\left(k \cdot \frac{ax+by}{k} + cz\right) \geqq k\log\frac{ax+by}{k} + c\log z \cdots ②$$
$$\left(= k\log\left(\frac{a}{k}x + \frac{b}{k}y\right) + c\log z\right)$$

$a+b=k$ より，$\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k}=1$ であるから，(1) より

$$k\log\frac{ax+by}{k} + c\log z \geqq k\left\{\frac{a}{k}\log x + \frac{b}{k}\log y\right\} + c\log z$$
$$= a\log x + b\log y + c\log z \cdots ③$$

①，②，③ より，$\log(ax+by+cz) \geqq a\log x + b\log y + c\log z$ が成立する。

© MathClinic

【戦略 2】(1) について

視覚化という路線が見えなかった場合，式でゴリゴリやっていくことになります。

従属 2 変数　→　文字消去
独立 2 変数　→　1 つを変数，他を定数 という予選決勝法

と，文字の扱いは整理しましょう。

【解 2】(1) について

$x=y$ のとき

$$\log(ax+by)=\log(a+b)x=\log x \quad (\because \text{ 条件 } a+b=1)$$

$$a\log x+b\log y=(a+b)\log x=\log x \quad (\because \text{ 条件 } a+b=1)$$

より，題意の関係式は成立する。

以下，$x<y$ として考えれば十分である。

$\log(ax+by)-a\log x-b\log y \geqq 0$ であることを示す。

$$\begin{aligned}&\log(ax+by)-a\log x-b\log y\\&=\log\{ax+(1-a)y\}-a\log x-(1-a)\log y\end{aligned}$$

で，これを a の関数と見て，$f(a)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(a)&=\frac{x-y}{ax+(1-a)y}+\log y-\log x\\&=\log y-\log x-\frac{y-x}{(x-y)a+y}\end{aligned}$$

$$f''(a)=-\frac{(y-x)^2}{\{(x-y)a+y\}^2}<0$$

よって，$f'(a)$ は単調減少。…(ア)

$$\begin{aligned}f'(0)&=\log y-\log x-\frac{y-x}{y}\\&=(y-x)\left\{\frac{\log y-\log x}{y-x}-\frac{1}{y}\right\}\end{aligned}$$

平均値の定理より $\begin{cases}\dfrac{\log y-\log x}{y-x}=\dfrac{1}{z}\\ x<z<y\end{cases}$ となる z が存在する。

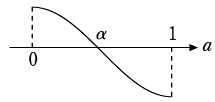
よって，$f'(0)=(y-x)\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{y}\right)>0$ …(イ)

$$\begin{aligned}f'(1)&=\log y-\log x-\frac{y-x}{x}\\&=(y-x)\left\{\frac{\log y-\log x}{y-z}-\frac{1}{x}\right\}\end{aligned}$$

平均値の定理より $\begin{cases}\dfrac{\log y-\log x}{y-x}=\dfrac{1}{z}\\ x<z<y\end{cases}$ となる z が存在する。

よって，$f'(1)=(y-x)\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}\right)<0$ …(ウ)

(ア)，(イ)，(ウ) より，$0\leqq a\leqq 1$ における $f'(a)$ のグラフは



のようになり，

a	(0)	…	α	…	(1)
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$	0	↗		↘	0

という増減表を得る。

よって，$0\leqq a\leqq 1$ で，$f(a)\geqq 0$ が成り立ち，題意は示された。

© MathClinic

【戦略 3】(2) について

逆に，(2) を視覚化する路線で考えてみます。

$0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$a+b+c=1$ **という条件からベクトルの内分点を意識できれば，頭がそういうモードになっていきます。**

【解 3】(2) について

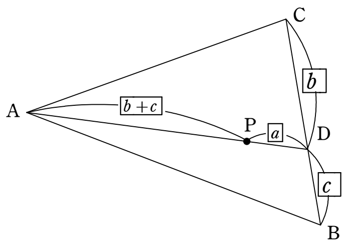
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　となる点 P を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\cdot\frac{b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}$$

線分 BC を $c:b$ に内分する点を D とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

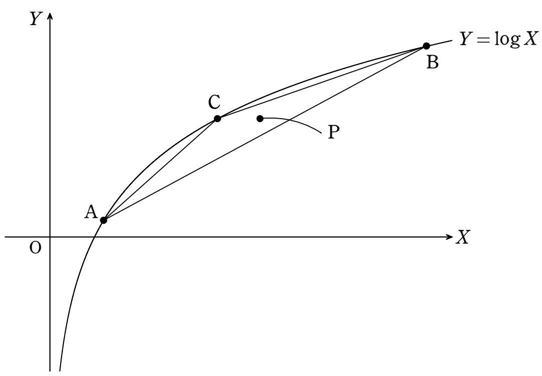
$a+b+c=1$ なので，P は線分 AD を $b+c:a$ に内分する点である。



よって，a，b，c が

$0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$a+b+c=1$を満たすとき，

点 P は △ABC の内部，及び周上に存在する。… (*)



$Y=\log X$ において

$$\mathrm{A}(x,\ \log x),\ \mathrm{B}(y,\ \log y),\ \mathrm{C}(z,\ \log z) \text{ とする。}$$

$Y=\log X$ は，上に凸の曲線である … (*)′

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\begin{pmatrix}ax\\a\log x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}by\\b\log y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}cz\\c\log z\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ax+by+cz\\a\log x+b\log y+c\log z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(*)，(*)′ より

$$f(ax+by+cz) \geqq a\log x+b\log y+c\log z$$

すなわち，$\log(ax+by+cz) \geqq a\log x+b\log y+c\log z$　が成立する。

【総括】

式で攻めるか図で攻めるかという選択を迫られるでしょう。

視覚化の路線については見えるか見えないかで差がついてしまいますが，(1) の方は有名な視覚化によるイメージなので，経験がモノを言います。

(2) の方は逆に視覚化路線は「見ようと思えば無理やり見える」というニュアンスでしょうか。

(1) の結果を拡張する方が自然ですし，$n=2$ のときから $n=3$ のときへ拡張したときの要領は，一般論への拡張に繋がります。

一般論の証明の手段はもちろん帰納法です。

© MathClinic