関数 $f(x)$ は，$p+q=1$ をみたすすべての正の数 p，q と，すべての実数 x，y に対して，$f(px+qy)\leqq pf(x)+qf(y)$ を満たしているとする。

このとき，2 以上の自然数 n について，$p_1+p_2+\cdots p_n=1$ をみたすすべての正の数 p_1，p_2，$\cdots$，p_n と，すべての実数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n に対して，$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)$ を証明せよ。

＜ '98 大阪市立大 ＞

【戦略】

例題を学習し，$n=2$ のときから $n=3$ への橋渡しの要領が自分のものになっていれば，$n=k$ から $n=k+1$ への橋渡しを考える数学的帰納法という方向性を睨みたくなるでしょう。

流れ自体は例題と同様です。

【解答】

$n=2$，3，…… に対して

$p_1+p_2+\cdots p_n=1$ なる正の数 p_1，p_2，$\cdots$，p_n と，すべての実数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n に対して，

$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)$ $\cdots(*)$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示す。

[1]　$n=2$ のとき

与えられた条件から $(*)$ は成立する。

[2]　$n=k$ $(k=2，3，\cdots)$ のとき

$p_1+p_2+\cdots p_k=1$ なる正の数 p_1，p_2，$\cdots$，p_k と，すべての実数 x_1，x_2，$\cdots$，x_k に対して，

$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k)\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_kf(x_k)$

が成立すると仮定する。

$P_1+P_2+\cdots P_k+P_{k+1}=1$ なる正の数 P_1，P_2，……，P_{k+1} と任意の実数 X_1，X_2，……，X_{k+1} に対して

$$f(P_1X_1+P_2X_2+\cdots+P_{k+1}X_{k+1})\leqq P_1f(X_1)+P_2f(X_2)+\cdots+P_{k+1}f(X_{k+1})$$

が成り立つことを示す。

$P_1+P_2+\cdots\cdots+P_k=S$ とおくと，$S+P_{k+1}=1$

$n=2$ のときに $(*)$ が成立するので

$$f\left(S\sum_{i=1}^{k}\frac{P_iX_i}{S}+P_{k+1}X_{k+1}\right)\leqq Sf\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{P_iX_i}{S}\right)+P_{k+1}f(X_{k+1})$$

$$=Sf\left(\frac{P_1}{S}X_1+\frac{P_2}{S}X_2+\cdots+\frac{P_k}{S}X_k\right)+P_{k+1}f(X_{k+1})$$

$$\leqq S\left\{\frac{P_1}{S}f(X_1)+\frac{P_2}{S}f(X_2)+\cdots+\frac{P_k}{S}f(X_k)\right\}+P_{k+1}f(X_{k+1})$$

$$=P_1f(X_1)+P_2f(X_2)+\cdots+P_kf(X_k)+P_{k+1}f(X_{k+1})$$

ゆえに，

$f(P_1X_1+P_2X_2+\cdots+P_{k+1}X_{k+1})\leqq P_1f(X_1)+P_2f(X_2)+\cdots+P_{k+1}f(X_{k+1})$

が成立し，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

[1]，[2] より，$n=2$，3，…… に対して $(*)$ が成り立つことが示され，題意は示された。

【総括】

下に凸であるため，例題と不等号の向きは逆ですが，シナリオは同じです。