(1) m, n を2つの正整数とする。$\cos m^\circ$, $\sin m^\circ$, $\cos n^\circ$, $\sin n^\circ$ のすべてが有理数であるとき，$\cos(m+n)^\circ$, $\sin(m+n)^\circ$ はともに有理数であることを示せ。
(2) n は60の約数とする。このとき，$\cos n^\circ$ と $\sin n^\circ$ のうち，少なくとも一方は無理数であることを示せ。

＜ ’97 京都大 ＞

【戦略】

(1)

$$\cos(m+n)^\circ = \cos m^\circ \cos n^\circ - \sin m^\circ \sin n^\circ$$
$$\sin(m+n)^\circ = \sin m^\circ \cos n^\circ + \cos m^\circ \sin n^\circ$$

という加法定理と，有理数同士の四則演算の結果もまた有理数になることを考えると，即解決です。

(2) **もちろん背理法です。**

$\cos n^\circ$, $\sin n^\circ$ **がどちらも有理数と仮定すると**

$$\cos mn^\circ,\ \sin mn^\circ\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$$ **は有理数**

となります。

特に， $\dfrac{60}{n}=\ell$ **となる正の整数** ℓ **が存在するため，**

$$\cos \ell n^\circ,\ \sin \ell n^\circ$$ **は有理数**

ということになります。

つまり， $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$ **がどちらも有理数ということになります**

しかし， $\sin 60^\circ\left(=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **は無理数ですから矛盾します。**

【解答】

(1) 有理数同士の

和，差，積，商

の計算結果も有理数となる。… (*)

$$\cos(m+n)^\circ = \cos m^\circ \cos n^\circ - \sin m^\circ \sin n^\circ$$
$$\sin(m+n)^\circ = \sin m^\circ \cos n^\circ + \cos m^\circ \sin n^\circ$$

であり，条件及び (*) から，$\cos(m+n)^\circ$, $\sin(m+n)^\circ$ はともに有理数となる。

(2) $\cos n^\circ$, $\sin n^\circ$ がどちらも有理数と仮定する。

$\cos kn^\circ$, $\sin kn^\circ$ が有理数であるとき，

$$\cos(k+1)n^\circ = \cos kn^\circ \cos n^\circ - \sin kn^\circ \sin n^\circ = (\text{有理数})$$
$$\sin(k+1)n^\circ = \sin kn^\circ \cos n^\circ + \cos kn^\circ \sin n^\circ = (\text{有理数})$$

であり，帰納的に

$$\cos mn^\circ,\ \sin mn^\circ\ (m=1,\ 2,\ \cdots)\ \text{は有理数} \cdots (**)$$

n は60の約数なので，$\dfrac{60}{n}=\ell$ となる正の整数 ℓ が存在する。

(**) から $\cos \ell n^\circ$, $\sin \ell n^\circ$ は有理数であるが，特に

$\sin \ell n^\circ\left(=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は無理数であり，矛盾する。

ゆえに，$\cos n^\circ$ と $\sin n^\circ$ のうち，少なくとも一方は無理数である。

【総括】

(1) の有理数同士の四則演算については

$$\cos m^\circ = \frac{b_1}{a_1},\ \sin m^\circ = \frac{b_2}{a_2},\ \cos n^\circ = \frac{b_3}{a_3},\ \sin n^\circ = \frac{b_4}{a_4}$$

と非負整数 a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 と設定して話を進めていく方が厳密ですし，証明問題と考えると，きっちり記述した方がよいでしょう。

(2) の $\begin{cases} \cos n^\circ \text{が有理数} \\ \sin n^\circ \text{が有理数} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos mn^\circ \text{が有理数} \\ \sin mn^\circ \text{が有理数} \end{cases}$

という流れは例題をやった後であれば多少自然に見えると思います。