【関連】

(1)　$\cos 1^\circ$ は有理数か。
(2)　$\sin 1^\circ$ は有理数か。

【戦略】

$\tan$ の加法定理と違い，$\sin$, $\cos$ の加法定理はお互いが入り混じっています。

$\cos n\theta$ を $\cos$ のみで表すことを考え

$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ に関する n 次式で表せる

という「チェビシェフの多項式」を利用します。

$\sin 1^\circ$ についても，$\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$ と無理やり $\cos$ の服に着替えさせます。

その後は

$$89^\circ \times m = 30^\circ \times n$$

となるような m , n を考えると，$(m,\ n) = (30,\ 89)$ があります。

$\theta = 89^\circ$ とすると $\cos m\theta$ は $\cos\theta$ についての整数係数 m 次式であるため，$\cos\theta$ が有理数のとき，$\cos m\theta$ ($= \cos 2670^\circ = \cos 150^\circ$) も有理数となり，矛盾します。

なお，チェビシェフの多項式を生み出す漸化式については

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta$$

という和積公式を基に

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2x\,T_{n+1}(x)$$

すなわち

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

というように作れます。

0 次式 (定数) を含めて考えても整合性がとれるよう，【解答】では次数を下げた形で記述します。

【解答】

0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を，$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

$$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \ (\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\ )$$

で定める。

このとき，$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ $\cdots(*)$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 0$, 1 のとき

$\cos 0\theta = 1$,　$T_0(\cos\theta) = 1$ なので，$\cos 0\theta = T_0(\cos\theta)$

$\cos 1\theta = \cos\theta$,　$T_1(\cos\theta) = \cos\theta$ なので，$\cos 1\theta = T_1(\cos\theta)$

よって，$n = 0$, 1 のとき $(*)$ は成立する。

(ii)　$n = k$, $k+1$ ($k = 0$, 1 , $\cdots$) のとき

$$\begin{cases} \cos k\theta = T_k(\cos\theta) \\ \cos(k+1)\theta = T_{k+1}(\cos\theta) \end{cases}$$ が成立すると仮定する。

$T_{k+2}(x) = 2x\,T_{k+1}(x) - T_k(x)$ であり，$x = \cos\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} T_{k+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\,T_{k+1}(\cos\theta) - T_k(\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\,\cos(k+1)\theta - \cos k\theta \quad (\ \because\ \text{帰納法の仮定}\ ) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta + \cos k\theta\} - \cos k\theta \\ &= \cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

となり，$n = k+2$ のときも $(*)$ は成立する。

(i) , (ii) より，$n = 0$, 1 , 2 , $\cdots$ において

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

が成立する。

< $\cos 1^\circ$ について >

$\theta = 1^\circ$ とする。

$(*)$ より，$\cos 60\theta$ は $\cos\theta$ についての整数係数 60 次式で表せる。

ゆえに，$\cos\theta$ が有理数と仮定すると，$\cos 60\theta$ も有理数となる。

つまり，$\cos 60^\circ$ ($= \sqrt{3}$) も有理数となるため，矛盾する。

これより，$\cos 1^\circ$ は無理数である。

< $\sin 1^\circ$ について >

$\sin 1^\circ$ が有理数と仮定する。

このとき，$\cos 89^\circ$ も有理数である。

$\cos\theta$ が有理数のとき，m を正の整数として $\cos m\theta$ も有理数。

($\because$ $(*)$ より　$\cos m\theta$ は $\cos\theta$ に関する整数係数 m 次式)

よって，

$$\cos(30\cdot 89)^\circ = \cos 2670^\circ = \cos(150^\circ + 360^\circ\cdot 7) = \cos 150^\circ$$

が有理数ということになるが，$\cos 150^\circ \left(= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)$ は無理数となり，矛盾する。

これより，$\sin 1^\circ$ は無理数である。

【総括】

チェビシェフの多項式をノーヒントで出題することはほぼないと思われるので，そこは安心してよいでしょう。