$\tan 1°$ は有理数か。

＜ '06 京都大 ＞

【戦略 1】

戦略的には背理法を睨むのがスジでしょう。

$\tan 1° = \dfrac{n}{m}$ （m，n は互いに素な正の整数） **などとおいても，このあと手詰まりです。**

洞察力がモノを言いますが， $\tan 2° = \dfrac{\tan 1° + \tan 1°}{1 - \tan 1° \tan 1°}$ **という加法定理を基にして**

$\tan 2°$ **も有理数とならないか？**

と看破できればしめたものです。

これを皮切りに， $\tan 3°$ **も有理数じゃん，** $\tan 4°$ **も有理数じゃん，と帰納的に有理数となっていくことが分かってきます。**

そうなってくると， $\tan 30° \left(= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right)$ **や** $\tan 60°$（$= \sqrt{3}$） **も有理数となってしまいますが，それは不合理です。**

【解 1】

$\tan 1°$ が有理数であると仮定する。…(*)

$\tan k°$ ($k = 1, 2, \cdots, 88$) が有理数であるとき

$$\tan(k+1)° = \frac{\tan k° + \tan 1°}{1 - \tan k° \tan 1°}$$

で，$\tan 1°$，$\tan k°$ が有理数であるなら，$\tan(k+1)°$ も有理数となる。

これより，$\tan 2°$，$\tan 3°$，……，$\tan 89°$ は全て有理数となる。

しかし，$\tan 60°$（$= \sqrt{3}$）は無理数であり，矛盾する。

これより，$\tan 1°$ は無理数である。

＜ $\sqrt{3}$ が無理数であることの証明 ＞

$\sqrt{3}$ が有理数と仮定する。

$\sqrt{3} > 0$ であるため，$\sqrt{3} = \dfrac{n}{m}$ （m，n は互いに素な正の整数）と表せる。

このとき，$n^2 = 3m^2$ であり，n^2 は 3 の倍数なので，n も 3 の倍数。

$$\left(\because \begin{cases} (3N)^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ (3N \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 3 \end{cases} \text{より } n^2 \equiv 0 \Leftrightarrow n \equiv 0 \right)$$

ゆえに，$n = 3M$（M は正の整数）と表せ，$9M^2 = 3m^2$

すなわち，$m^2 = 3M^2$ であり，m^2 は 3 の倍数なので，m も 3 の倍数。

これより，m，n がともに 3 で割り切れ，互いに素であることに矛盾する。

したがって $\sqrt{3}$ は無理数である。

【戦略 2】

$$\tan 2^\circ = \frac{\tan 1^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan 1^\circ}$$

を加法定理という意識ではなく，2 倍角の公式という意識で見て

$$\tan 4^\circ,\ \tan 8^\circ,\ \tan 16^\circ,\ \cdots$$

が有理数であるという見方をしてしまう人もいると思います。

この場合，

$$2^\circ + 4^\circ + 8^\circ + 16^\circ = 30^\circ$$

と見れば解決です。

【解 2】

$\tan 1^\circ$ が有理数と仮定する。

$\tan k^\circ$ が有理数のとき，$\tan 2k^\circ = \dfrac{2\tan k^\circ}{1-\tan^2 k^\circ}$ より，$\tan 2k^\circ$ も有理数。

これより，$\tan 2^\circ$，$\tan 4^\circ$，$\tan 8^\circ$，$\tan 16^\circ$ は有理数である。

ここで，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ が有理数であれば，

$$\tan(\alpha+\beta)\left(=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right)\text{ も有理数である。}$$

これより，$\alpha = 2^\circ$，$\beta = 4^\circ$ とすれば，$\tan 6^\circ$ が有理数

$\alpha = 6^\circ$，$\beta = 8^\circ$ とすれば，$\tan 14^\circ$ が有理数

$\alpha = 14^\circ$，$\beta = 16^\circ$ とすれば，$\tan 30^\circ$ が有理数

ということになる。

しかし，$\tan 30^\circ\left(=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ は無理数であり，矛盾する。

したがって，$\tan 1^\circ$ は無理数である。

【総括】

手掛かりとなる部分が極端に少なく，洞察力を要します。

解答のボリューム自体はそこまで大きくなく，計算自体も多いわけではありません。

京大が好む要素を含む問題でしょう。