次の条件 (a)，(b) をともにみたす実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。

(a)　p，q，r の絶対値は等しい

(b)　3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

＜ ’04 岡山大 ＞

【戦略】

ひとまず，最初に思うこととしては

実数係数の 3 次方程式が虚数解をもつなら，

- **α，$\overline{\alpha}$ という共役な複素数の形で虚数解をもつ。**
- **残りの解は実数解である。**

ということが目に付きます。

ひとまず，これら解の情報と今回求める p，q，r という係数を結びつける関係式としては，まさに「名が体を表す」

解と係数の関係

でしょう。

これにより， $\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+t=-p\\ \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}t+t\alpha=q\\ \alpha\,\overline{\alpha}\,t=-r\end{cases}$ **という関係式を得ます。**

ここで，条件 (b) の $|\alpha|=1$ が効いてきて，$|\alpha|^2=1$，すなわち $\alpha\overline{\alpha}=1$ となります。

これにより， $\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+t=-p\\ 1+t\,(\alpha+\overline{\alpha})=q\quad\cdots(★)\\ t=-r\end{cases}$ **と整理できます。**

ここから何をしたらよいのか見えなくなってしまうかもしれません。

戦略的に考えると，条件 (a) は

$$|p|=|q|=|r|$$

ということなので，ここから $(p,\ q)=(\pm r,\ \pm r)$ (複号任意)

と，p，q を消去できるわけです。

そう考えると，(★) の式は実質 α，t，r という 3 文字分の条件ということになるでしょう。
($\overline{\alpha}$ は α が決まれば自動的に定まるので，実質 α，t，r の 3 文字分です。)

「条件 1 つで 1 文字消去」という格言に従い，$\alpha+\overline{\alpha}$，t を消去していきます。

ここからは手なりに，進んでいくはずです。

【解答】

$$x^3+px^2+qx+r=0\ \cdots(*)$$

が虚数解 α をもつとする。

このとき，$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$ であり，

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha})^3+p\,(\overline{\alpha})^2+q\,\overline{\alpha}+r&=\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}\\&=0\end{aligned}$$

であり，$\overline{\alpha}$ も $(*)$ の解である。

α は虚数であるため，α，$\overline{\alpha}$ は相異なるため，$(*)$ の解は

$$x=\alpha,\ \overline{\alpha},\ t\quad(t\text{ は実数})$$

である。
(実数係数の 3 次方程式は少なくとも 1 つ実数解をもつことに注意)

解と係数の関係から $\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+t=-p\ \cdots①\\ \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}t+t\alpha=q\ \cdots②\\ \alpha\,\overline{\alpha}\,t=-r\ \cdots③\end{cases}$

条件 (b) より，$|\alpha|=1$ であるため，$|\alpha|^2=1$ ，すなわち $\alpha\overline{\alpha}=1$

これより，①，②，③ は

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+t=-p\ \cdots①\\ 1+t\,(\alpha+\overline{\alpha})=q\ \cdots②'\\ t=-r\ \cdots③'\end{cases}$$

と整理できる。

①，②′ より，$\alpha+\overline{\alpha}$ を消去すると，$1+t\,(-p-t)=q$

③ より，t を消去すると，$1-r\,(-p+r)=q$

整理すると，$r^2-pr+q-1=0\ \cdots(☆)$

条件 (a) より，$(p,\ q)=(\pm r,\ \pm r)$ (複号任意)

(i)　$(p,\ q)=(r,\ r)$ のとき

(☆) より $r^2-r^2+r-1=0$，すなわち $r=1$ を得る。

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$ であり，$(*)$ は

$$\begin{aligned}x^3+x^2+x+1&=0\\(x+1)(x^2+1)&=0\\x&=-1,\ \pm i\end{aligned}$$

であり，題意を満たす。

(ii)　$(p, q)=(r, -r)$ のとき

(☆) より $r^2-r^2-r-1=0$，すなわち $r=-1$ を得る。

このとき，$(p, q, r)=(-1, 1, -1)$ であり，(*) は

$$x^3-x^2+x-1=0$$
$$(x-1)(x^2+1)=0$$
$$x=1, \pm i$$

であり，題意を満たす。

(iii)　$(p, q)=(-r, r)$ のとき

(☆) より $r^2+r^2+r-1=0$，すなわち $2r^2+r-1=0$

これより，$(2r-1)(r+1)=0$

ゆえに，$(p, q, r)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ または $(1, -1, -1)$

(iii−1)　$(p, q, r)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき

(*) は

$$x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$$
$$2x^3-x^2+x+1=0$$
$$(2x+1)(x^2-x+1)=0$$
$$x=-\frac{1}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

であり，題意を満たす。

(iii−2)　$(p, q, r)=(1, -1, -1)$ のとき

(*) は

$$x^3+x^2-x-1=0$$
$$(x+1)^2(x-1)=0$$
$$x=-1, 1$$

で，虚数解をもたないため，題意を満たさない。

(iv)　$(p, q)=(-r, -r)$ のとき

(☆) より $r^2+r^2-r-1=0$，すなわち $2r^2-r-1=0$

これより，$(2r+1)(r-1)=0$

ゆえに，$(p, q, r)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ または $(-1, -1, 1)$

(iv−1)　$(p, q, r)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ のとき (*) は

$$x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$$
$$2x^3+x^2+x-1=0$$
$$(2x-1)(x^2+x+1)=0$$
$$x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

であり，題意を満たす。

(iv−2)　$(p, q, r)=(-1, -1, 1)$ のとき

(*) は

$$x^3-x^2-x+1=0$$
$$(x-1)^2(x+1)=0$$
$$x=-1, 1$$

で，虚数解をもたないため，題意を満たさない。

以上 (i)，(ii)，(iii)，(iv) より，求める実数の組 (p, q, r) は

$$(p, q, r)=(1, 1, 1), (-1, 1, -1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

【総括】

$x^3+px^2+qx+r=0$ という一般性の高い 3 次方程式を直接解いてどうのこうのしようというのは，よもやいないと思います。

解と係数の関係に焦点を定め，実数係数の 3 次方程式の解の持ち方を的確にとらえて処理していくことが山場となったことでしょう。

また，解と係数の関係を立式した後の条件の使い方という点でも差がついたと思います。

場当たり的に進めていってしまうと，結論まで辿り着けるかどうかはギャンブル的要素に左右されかねません。