以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ。

(2) $2\cos 80^\circ$ は３次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解であることを示せ。

(3) $x^3-3x+1=(x-2\cos 80^\circ)(x-2\cos\alpha)(x-2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし，$0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ とする。

＜ '09 筑波大 ＞

【戦略】

(1) $\cos$ **についての３倍角の公式**

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

を証明するわけです。

$\cos(2\theta+\theta)$ **と見て，加法定理や各種基本事項を用いながら一つずつ丁寧に処理していきましょう。**

(2) $2\cos 80^\circ$ **を** x^3-3x+1 **に代入した** $(2\cos 80^\circ)^3-3\cdot 2\cos 80^\circ+1$ **がめでたく０になっていれば証明完了です。**

(1) **を誘導と見て**

$$(2\cos 80^\circ)^3-3\cdot 2\cos 80^\circ+1=2(4\cos^3 80^\circ-3\cos 80^\circ)+1$$

と見ると，(1) **で示した３倍角の公式の形が登場します。**

(3) $2\cos 80^\circ$，$2\cos\alpha$，$2\cos\beta$ **が** $x^3-3x+1=0$ **の解ということになります。**

そこで，$2\cos\theta$（$0^\circ<\theta<180^\circ$）**が** $x^3-3x+1=0$ **解だとして様子を掴んでみると**

$$\begin{aligned}&8\cos^3\theta-6\cos\theta+1=0\\&2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1=0\\&2\cos 3\theta+1=0\end{aligned}$$

です。

$\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ **となるような** θ **は** $0^\circ<3\theta<540^\circ$ **なので**

$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ$，**つまり** $\theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

$0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ **に注意すれば，**$\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$ **と解決します。**

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

となり，示された。

(2)
$$\begin{aligned}(2\cos 80^\circ)^3-3\cdot 2\cos 80^\circ+1&=2(4\cos^3 80^\circ-3\cos 80^\circ)+1\\&=2\cos(3\cdot 80^\circ)+1\\&=2\cos 240^\circ+1\\&=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\\&=0\end{aligned}$$

つまり，$2\cos 80^\circ$ は，$x^3-3x+1=0$ の解である。

(3) $2\cos 80^\circ$，$2\cos\alpha$，$2\cos\beta$ は $x^3-3x+1=0$ の実数解である。

$2\cos\theta$（$0^\circ<\theta<180^\circ$）が $x^3-3x+1=0$ の解であるとき

$$(2\cos\theta)^3-3(2\cos\theta)+1=0$$

$2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1=0$

(1) より，$2\cos 3\theta+1=0$，すなわち $\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ であり，この範囲で $\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ を満たすのは

$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ$，つまり $\theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

条件 $0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ より，$\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$ …㊟

【総括】

$x^3-3x+1=0$ の実数解が

$$x=2\cos 40^\circ,\ 2\cos 80^\circ,\ 2\cos 160^\circ$$

ということを意味するわけです。

この３次方程式がノーヒントかつ初見だと，かなりキツイでしょう。

例題で扱った $x^3-3x+1=0$ という３次方程式についての関連事項として，余裕があれば本問の結果やシナリオを例題などに結び付けていき，今後の糧となるようにしましょう。

© MathClinic