$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　$\alpha$ が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3)　$f(x)=0$ の解を小さい順に $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ とすれば，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。

＜ ’09 神戸大　類題：’97 早稲田大 ＞

**【戦略 1】**

(1)　**微分してグラフをかけばよいだけです。**

(2)　$f(\alpha)=0$ **であるとき，**$f(g(\alpha))=0$ **であることを示すことになります。**

**このことから** $f(g(\alpha))$ **を計算していけばよいでしょう。**

$f(g(\alpha))=\cdots\cdots=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$ **までは手なりに計算できます。**

**最終的に** $f(\alpha)=0$ **が決め手となって，**$f(g(\alpha))=0$ **と言えるというラストシーンを夢見れば**

$f(g(\alpha))=f(\alpha)\cdot(\qquad)$ **という形で因数分解できるはず**

**という気持ちが湧いてくるはずです。**

(3)　(2) **から** $g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ **も** $f(x)=0$ **の解であるため，**

$g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ **は** $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ **と 1 対 1 対応します。**

$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ **を区別する手立ては大小関係ですから**

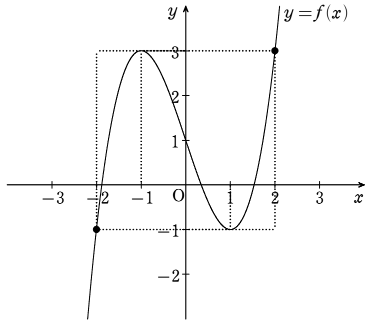
$g(\alpha_1)\,(=\alpha_1{}^2-2)$，$g(\alpha_2)\,(=\alpha_2{}^2-2)$，$g(\alpha_3)\,(=\alpha_3{}^2-2)$

**の大小関係を把握することに興味がむかうはずです。**

【解 1】

(1)　$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ |




(図 1)

(図 1) より，$f(x)=0$ の実数解は全て $-2<x<2$ の範囲にあり，全て絶対値は 2 より小さい。

(2)　$f(g(\alpha))=f(\alpha^2-2)$

$$\begin{aligned}&=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1\\&=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1\\&=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)\\&=f(\alpha)(\alpha^3-3\alpha-1)\end{aligned}$$

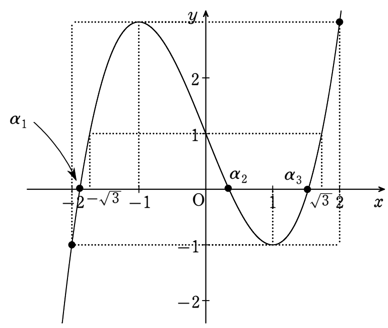
**因数分解できることに気づいたのではありません。$(\alpha^3-3\alpha+1)$ で括れることに気が付いていたのです。**

ゆえに，$f(g(\alpha))=f(\alpha)(x^3-3x-1)$

$\alpha$ が $f(x)=0$ の解であるとき，$f(\alpha)=0$ だから，$f(g(\alpha))=0$

つまり，$\alpha$ が $f(x)=0$ の解であるとき，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である。

(3)




(図 2)

(図 2) より $\begin{cases}-2<\alpha_1<-\sqrt{3}\\0<\alpha_2<1\\1<\alpha_3<\sqrt{3}\end{cases}$

ゆえに，$\begin{cases}3<\alpha_1{}^2<4\\0<\alpha_2{}^2<1\\1<\alpha_3{}^2<3\end{cases}$ であり，$\begin{cases}1<\alpha_1{}^2-2<2\\-2<\alpha_2{}^2-2<-1\\-1<\alpha_3{}^2-2<1\end{cases}$

これより，$\begin{cases}1<g(\alpha_1)<2\\-2<g(\alpha_2)<-1\\-1<g(\alpha_3)<1\end{cases}$ であり，$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$

(2) より，$g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ は $f(x)=0$ の解であり，小さい方から順に

$$g(\alpha_2)\text{，}g(\alpha_3)\text{，}g(\alpha_1)$$

一方，$f(x)=0$ の解を小さい方から順に $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ としていたことから，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3\text{，}g(\alpha_2)=\alpha_1\text{，}g(\alpha_3)=\alpha_2$$

と対応することになり，題意は示された。

**【戦略 2】(3) について**

**幸いにも今回は証明形式であり，$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ という条件から**

$$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$$

**を証明できればよいことが分かります。**

**これを示すために，素直に差を取るのも自然です。**

【解 2】(3) について

$$\begin{aligned} g(\alpha_3)-g(\alpha_2)&=(\alpha_3{}^2-2)-(\alpha_2{}^2-2)\\ &=(\alpha_3+\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)\end{aligned}$$

ここで，(図 2) から $\begin{cases}0<\alpha_2<1\\1<\alpha_3<2\end{cases}$ であるため，

$$\alpha_3+\alpha_2>0\text{，}\alpha_3-\alpha_2>0$$

ゆえに，$g(\alpha_3)-g(\alpha_2)>0$ …(☆)

一方，$\begin{aligned} g(\alpha_1)-g(\alpha_3)&=(\alpha_1{}^2-2)-(\alpha_3{}^2-2)\\ &=(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)\end{aligned}$

ここで，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ は $x^3-3x+1=0$ の解であるため，解と係数の関係から

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ であり，$\alpha_1+\alpha_3=-\alpha_2<0$

一方，$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ という条件から，$\alpha_1-\alpha_3<0$

ゆえに，$g(\alpha_1)-g(\alpha_3)>0$ …(★)

(☆)，(★) より，$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$

一方，$f(x)=0$ の解を小さい方から順に $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ としていたことから，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3\text{，}g(\alpha_2)=\alpha_1\text{，}g(\alpha_3)=\alpha_2$$

と対応し，題意は示された。

【総括】

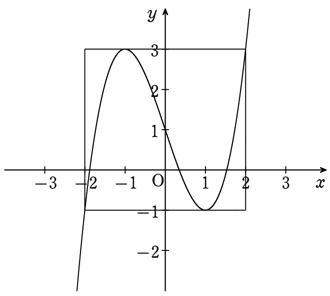
古くから散見されるネタです。

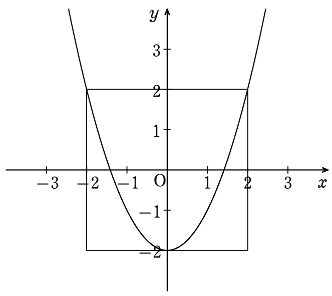
$g(x)=x^2-2$ という関数により，3 次方程式 $f(x)=0$ の解が巡回性をもっているという面白い話題ですね。

丁寧な誘導があったため，解ききること自体は十分可能だと思います。

もちろん，$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ という設定は天から降ってきたものではありません。

今回の $y=f(x)$ のグラフや，$y=g(x)$ のグラフは




という正方形に収まっています，このことから

変形チェビシェフの多項式

がピンときた方は勉強している人だと思います。
（これについては「テーマ別演習：チェビシェフの多項式」という内容で扱っています。）