２変数の確率

n，k を $k<n\leqq 2k$ を満たす正の整数とする。1 個のサイコロを n 回投げるとき，1 の目が k 回以上連続して出る確率を求めよ。

＜ '98 九州芸術工科大 改 ＞

【戦略】

直接考えようにも埒があきませんから，漸化式を導入することを考えます。

今回の確率は n，k に依存する確率なので，$P_{n,k}$ と設定することにします。

確率漸化式を立てることを目論むわけですが，どのように場合分けをするかも問題です。

漏れなく，重複なく

ということを考えると

[1]　$n-1$ **回目までに題意を満たしている**
[2]　$n-1$ **回目までに題意を満たしていない**

という場合分けが自然でしょうか。

[1] **のときは，n 回目の目は何でもよいため，$P_{n-1,k}$ で済みます。**

[2] **のときは，n 回目の目が 1 でないと，題意を満たすことなくサイコロ投げが終わってしまいますから，n 回目の目は 1 である必要があります。**

$n-1$ 回目までに題意を満たしておらず，n 回目の 1 で初めて題意を満たすわけですから，この n 回目の 1 は

k 連続の最後の 1

ということになります。

イメージを図示すると

$$\overbrace{\square\square\square\square\cdots\cdots\square}^{n-k-1\text{ 個}}\ \ \bar{1}\ \ \overbrace{1\,1\,1\,1\cdots\cdots 1}^{k\text{ 個}}$$

$n-k$ 回目　　n 回目

$n-k$ 回目が 1 だと
$n-1$ 回目までに k 連続が発生し，
場合分けの基準に反します

というようなイメージになります。

条件 $n\leqq 2k$ から，$n-k-1\leqq k-1$ なので，前半の □ 部分には 1 が連続して k 個並ぶことはあり得ません。

このことから，[2] の確率は $\dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$ ということになります。

このことから，$P_{n,k}=P_{n-1,k}+\dfrac{5}{6^{k+1}}$ ということになり，n について見ると等差数列となっていますが，ケチがつかないように，差の形にして辺々加えるまとめ方で処理することにします。

【解答】

題意の確率を $P_{n,k}$ とおく。

[1]　$n-1$ 回目までに 1 の目が k 回以上連続して出るとき

n 回目はどの目が出てもよい。

したがって，確率は $P_{n-1,k}$

[2]　$n-1$ 回目までに 1 の目が k 回以上連続して出ないとき

n 回目は 1 である必要がある。

この n 回目に出る 1 の目で初めて題意を満たすので，

n 回目の 1 は k 連続の最後の 1

ゆえに

$$\overbrace{\square\square\square\square\cdots\cdots\square}^{n-k-1\text{ 個}}\ \ \bar{1}\ \ \overbrace{1\,1\,1\,1\cdots\cdots 1}^{k\text{ 個}}$$

$n-k$ 回目　　n 回目

という構造である。

ここで，条件 $n\leqq 2k$ から，$n-k-1\leqq k-1$

つまり，□ の部分に 1 が連続して k 個並ぶことはあり得ない。

したがって，[2] のときの確率は $1^{n-k-1}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^k=\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

[1], [2] から，$P_{n,k}=P_{n-1,k}+\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

これより，$P_{n,k}-P_{n-1,k}=\dfrac{5}{6^{k+1}}$ であるため，

$$\begin{aligned}
P_{n,k}-P_{n-1,k}&=\frac{5}{6^{k+1}}\\
P_{n-1,k}-P_{n-2,k}&=\frac{5}{6^{k+1}}\\
P_{n-2,k}-P_{n-3,k}&=\frac{5}{6^{k+1}}\\
&\vdots\\
P_{k+1,k}-P_{k,k}&=\frac{5}{6^{k+1}}
\end{aligned}$$

辺々加えると，$P_{n,k}-P_{k,k}=\dfrac{5}{6^{k+1}}\cdot(n-k)$ を得る。

$$\begin{aligned}
P_{n,k}&=P_{k,k}+\frac{5(n-k)}{6^{k+1}}\\
&=\left(\frac{1}{6}\right)^k+\frac{5n-5k}{6^{k+1}}\quad(\because P_{k,k}\text{ は } k \text{ 回全て 1 の目が出る確率})\\
&=\frac{5n-5k+6}{6^{k+1}}\ \cdots\text{答}
\end{aligned}$$

【総括】

漸化式を導入するかどうかも大きな判断ですし，漸化式を導入したとしてもその後の場合分けもやり方によっては，ひと悶着ある可能性もあります。

例えば最初の一手目で場合分けをして

[1]　1 回目が 1 の目が出るとき
[2]　1 回目が 1 の目でないとき

などとやると [1] のときが困ります。

ここから先で必ずしも
k 連続しなくても
1 □ □ □ □ □ □ …… □ □
こいつとくっついて
k 連続となる可能性もあるからです。

見た目と題意はものすごくシンプルなのですが，難問と言ってよいでしょう。

なお，原題は漸化式の導入と，誘導設問 $P_{n,k}-P_{n-1,k}$ を求めよというものがありましたが，今回は方針決定の訓練のため誘導設問をカットしました。