

2変数の確率

n, k を $k < n \leq 2k$ を満たす正の整数とする。1個のサイコロを n 回投げるとき、1の目が k 回以上連続して出る確率を求めよ。

< '98 九州芸術工科大 改 >

【戦略】

直接考えようにも埒があきませんから、漸化式を導入することを考えます。

今回の確率は n, k に依存する確率なので、 $P_{n, k}$ と設定することにします。

確率漸化式を立てることを目論むわけですが、どのように場合分けをするかも問題です。

漏れなく、重複なく

ということを考えると

- [1] $n-1$ 回目までに題意を満たしている
- [2] $n-1$ 回目までに題意を満たしていない

という場合分けが自然でしょうか。

[1] のときは、 n 回目の目は何でもよいので、 $P_{n-1, k}$ で済みます。

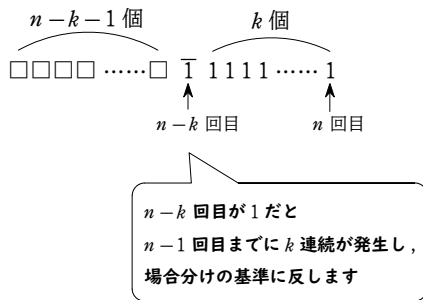
[2] のときは、 n 回目の目が1でないと、題意を満たすことなくサイコロ投げが終わってしまいますから、 n 回目の目は1である必要があります。

$n-1$ 回目までに題意を満たしておらず、 n 回目の1で初めて題意を満たすわけですから、この n 回目の1は

k 連続の最後の1

ということになります。

イメージを図示すると



このようなイメージになります。

条件 $n \leq 2k$ から、 $n-k-1 \leq k-1$ なので、前半の \square 部分には1が連続して k 個並ぶことはあり得ません。

このことから、[2] の確率は $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k$ ということになります。

このことから、 $P_{n, k} = P_{n-1, k} + \frac{5}{6^{k+1}}$ ということになり、 n について見る

と等差数列となっていますが、ケチがつかないように、差の形にして辺々加えるまとめ方で処理することにします。

【解答】

題意の確率を $P_{n, k}$ とおく。

[1] $n-1$ 回目までに1の目が k 回以上連続して出るとき

n 回目はどの目が出てよい。

したがって、確率は $P_{n-1, k}$

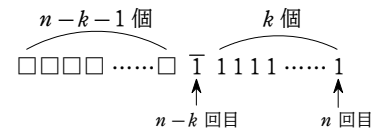
[2] $n-1$ 回目までに1の目が k 回以上連続して出ないとき

n 回目は1である必要がある。

この n 回目に出る1の目で初めて題意を満たすので、

n 回目の1は k 連続の最後の1

ゆえに



という構造である。

ここで、条件 $n \leq 2k$ から、 $n-k-1 \leq k-1$

つまり、 \square の部分に1が連続して k 個並ぶことはあり得ない。

したがって、[2] のときの確率は $1^{n-k-1} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^k$

[1], [2] から、 $P_{n, k} = P_{n-1, k} + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^k$

これより、 $P_{n, k} - P_{n-1, k} = \frac{5}{6^{k+1}}$ であるため、

$$P_{n, k} - P_{n-1, k} = \frac{5}{6^{k+1}}$$

$$P_{n-1, k} - P_{n-2, k} = \frac{5}{6^{k+1}}$$

$$P_{n-2, k} - P_{n-3, k} = \frac{5}{6^{k+1}}$$

⋮

$$P_{k+1, k} - P_{k, k} = \frac{5}{6^{k+1}}$$

辺々加えると、 $P_{n, k} - P_{k, k} = \frac{5}{6^{k+1}} \cdot (n-k)$ を得る。

$$P_{n, k} = P_{k, k} + \frac{5(n-k)}{6^{k+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{5n-5k}{6^{k+1}} \quad (\because P_{k, k} \text{ は } k \text{ 回全て } 1 \text{ の目が出る確率})$$

$$= \frac{5n-5k+6}{6^{k+1}} \dots \text{ ㊦}$$

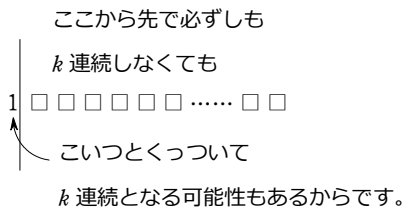
【総括】

漸化式を導入するかどうか大きな判断ですし、漸化式を導入したとしてもその後の場合分けもやり方によっては、ひと悶着ある可能性もあります。

例えば最初の一手目で場合分けをして

- [1] 1回目が1の目が出るとき
- [2] 1回目が1の目でないとき

などとやると[1]のときが困ります。



見た目と題意はものすごくシンプルなのですが、難問と言ってよいでしょう。

なお、原題は漸化式の導入と、誘導設問 $P_{n,k} - P_{n-1,k}$ を求めよというものがありました。今回は方針決定の訓練のため誘導設問をカットしました。