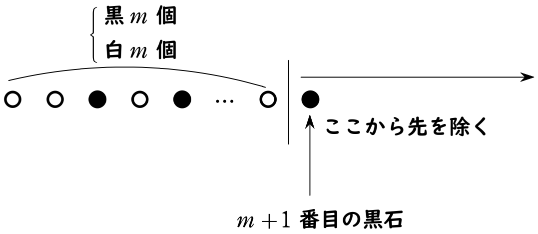
　白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

　その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白色と黒色が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

＜ ’01 東京大 ＞

【戦略】



という状態が実現可能であるということを示すわけです。

今回は 除かれずに残る黒と白が $\begin{cases}\text{黒 0 個}\\\text{白 0 個}\end{cases}$ **という場合も許されますから**

$m=0，1，\cdots\cdots，180$ **として考えます。**

除かれる黒石を $\mathrm{B}_m\,(m=0，1，\cdots，180)$ **として，それよりも左側にある白石が** $f(m)$ **個とすると，結局は**

$$f(m)=m$$

となる m **の存在を示すことになります。**

明らかに， $f(0)\leqq f(1)\leqq\cdots\cdots\leqq f(180)$ **なので，離散量の不動点定理から，そのような** m **の存在は保証されます。**

本来は答案において離散量の不動点定理の証明は付しておく必要があると思いますが，今回は省略します。

【解答】

並んでいる黒石を左から $\mathrm{B}_0，\mathrm{B}_1，\cdots\cdots，\mathrm{B}_{180}$ とする。

B_k より左にある白石の個数を $f(k)\,(0\leqq k\leqq 180)$ とする。

$A=\{0，1，2，\cdots\cdots，180\}$ とすると，f は $A\to A$ への写像 (関数) であり，

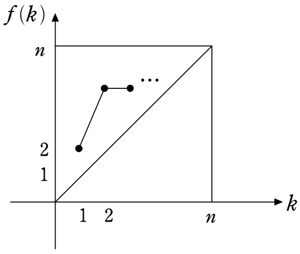
$$f(0)\leqq f(1)\leqq\cdots\cdots\leqq f(k)\leqq\cdots\cdots\leqq f(180)$$

ゆえに，$f(m)=m$ を満たす $m\in A$ が存在する。

B_m より左にある黒石の個数は m ，白石の個数は $f(m)$ であり，
この B_m が題意の黒石であり，与えられた条件を満たす黒石の存在が示された。

【戦略 2】

離散量の不動点定理はグラフ的には



と

・正方形の枠からはみ出さない

・f が広義単調増加

だと，$y=x$ とぶつからざるを得ない

という主張です。

本問においては，このグラフ的イメージをもって処理してみます。

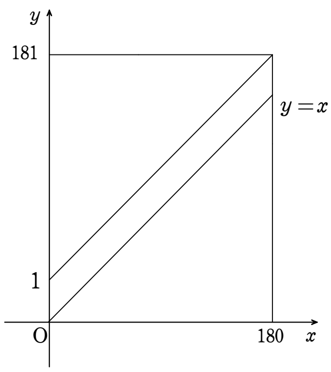
【解 2】

碁石の並びに対して，原点からスタートし

$$\begin{cases}\text{黒石：}y\text{ 軸方向に 1 だけ進む}\\\text{白石：}x\text{ 軸方向に 1 だけ進む}\end{cases}$$

という移動を対応させ，その経路を考える。

碁石の並びと



$(0，0)$ から $(180，181)$ までの経路が 1 対 1 に対応する。

1 つめの碁石が黒だと，その黒石が条件を満たすことになる。

以後，1 つめの碁石は白として，$(1，0)$ から $(180，181)$ までの経路を考える。

題意の黒石が存在しないと仮定すると，$y=x$ に乗った直後は y 軸方向の移動ではないということになり，それはすなわち

$y<x+1$ という領域のみを通る経路ということになる。

しかし経路の終点は $(180，181)$ で，これは $y=x+1$ 上の点であるため，それは不可能である。

したがって，題意は示された。

【総括】

180 個や 181 個という数にあまり意味はありません。

なので，実験するならば数が小さい数で実験すればよいでしょう。

計算自体はほとんどなく，構造を見抜く目と，それをまとめる記述力が必要な問題です。