離散量の不動点定理

　n を定まった正の整数とし，$1 \leqq k \leqq n$ なる整数 k の各々に，$1 \leqq r \leqq n$ なる整数 r を対応させる関数 $r = f(k)$ があって，

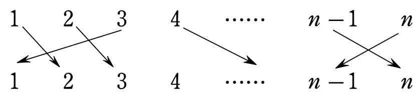
$$k_1 < k_2 \text{ ならばつねに } f(k_1) \leqq f(k_2)$$

であるとする。
　このとき，$f(m) = m$ となる整数 m が存在することを証明せよ。

＜ '73 名古屋大　'82 岐阜大 ＞

【戦略 1】

まず条件を抜きにした関数 f のイメージとしては



といったように，

1 を $1 \sim n$ のどれかに対応させる
（ 上の例だと 2 に対応 ： $f(1) = 2$ ）

2 を $1 \sim n$ のどれかに対応させる
（ 上の例だと 3 に対応 ： $f(2) = 3$ ）

3 を $1 \sim n$ のどれかに対応させる
（ 上の例だと 1 に対応 ： $f(3) = 1$ ）

といった感じです。$f(k) = r$ ということは

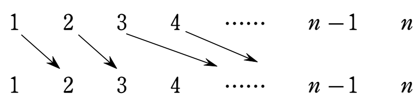
k の対応先が r

と読んでください。

ここで，条件

$$k_1 < k_2 \text{ ならばつねに } f(k_1) \leqq f(k_2)$$

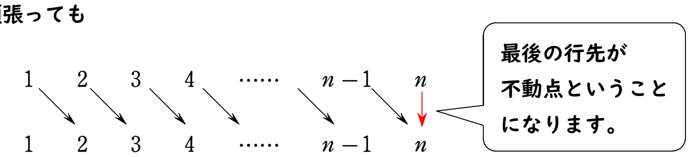
ということは



のように，↓ または ↘ 方向の対応しかないということです。

$f(m) = m$ となる m (不動点) の存在を証明したいわけですが

頑張っても



これを数式的に言おうとすると，背理法によって

頑張っても最後矛盾する

というオチで仕留める作戦が見えてきます。

【解 1】

集合 $A = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ とし，

任意の $k \in A$ に対し，$f(k) \fallingdotseq k$ であると仮定する。

条件より $f(1) \leqq f(2) \leqq \cdots\cdots \leqq f(n-1) \leqq f(n) \cdots (*)$ であることに注意する。

$f(1) \fallingdotseq 1$，および $f(1) \in A$ より，$2 \leqq f(1)$

$(*)$ より $2 \leqq f(2)$ で，仮定から $2 < f(2)$，すなわち $3 \leqq f(2)$

$(*)$ より $3 \leqq f(3)$ で，仮定から $3 < f(3)$，すなわち $4 \leqq f(3)$

これを繰り返すと，$n \leqq f(n)$ で，仮定から $n < f(n)$

$f(n) \in A$ なので，$f(n) \leqq n$ であるため，矛盾する。

以上から，$f(m) = m$ となる $m \in A$ が存在する。

【戦略 2】

上の「これを繰り返すと…」という部分をごまかしたくなければ，帰納法という路線でやるのも一つの策です。

帰納法のタイプは，1 から k まで全てを仮定する

「人生帰納法」

というタイプです。

【解 2】

集合 $A_n=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ とし，$A_n \to A_n$ の写像 f で

$f(m)=m$ となる $m \in A_n$ が存在する … (☆)

ということを n についての数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$f(1)=1$ となるしかないため，(☆) は正しい。

(ii) $n=2$ のとき $A_2=\{1,2\}$

このとき，$1 \leqq f(1) \leqq f(2) \leqq 2$ である。

$f(2)=2$ のときは (☆) は正しい。

$f(2)<2$ のときは，$f(2) \leqq 1$ であるため，$1 \leqq f(1) \leqq f(2) \leqq 1$

すなわち，$f(1)=1$ となるため，(☆) は正しい。

いずれにせよ，(☆) は正しい。

(iii) $n=1,2,\cdots,k$ のすべての n で (☆) が正しいと仮定する。

このとき，$1 \leqq f(1) \leqq f(2) \leqq \cdots\cdots \leqq f(k) \leqq k$

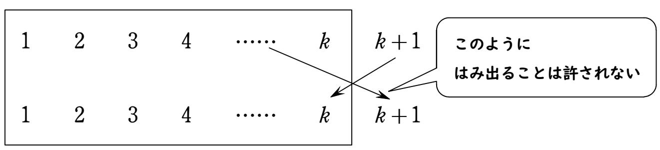
さて，$A_{k+1}=\{1,2,\cdots,k,k+1\}$ として，$A_{k+1} \to A_{k+1}$ への写像 f を考える。

$f(k+1)=k+1$ ならば，(☆) は正しいと言える。

$f(k+1)<k+1$ ならば，$f(k+1) \leqq k$

f の条件から，$A_i \to A_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ の写像を考えることになる。

例えば，$f(k+1)=k$ のときは



という $\boxed{}$ で囲った範囲内での写像 $(A_k \to A_k)$ を考えることになる。

ゆえに，帰納法の仮定から，$f(m)=m$ となる $m \in A_i$ が存在する。

もちろん，この m は $m \in A_{k+1}$ でもあるため

$n=k+1$ のときも (☆) は正しい。

【総括】

問題文の主張を噛み砕けないと（何を言っているのかが分からないと）当たり前ですが手が出ませんから，題意の把握ができたかどうかで勝負の半分，もしくはそれ以上は決まってしまうと言っていいでしょう。

【戦略 1】で述べたようなイメージ図が題意の把握に寄与します。

本問の主張は「離散量の不動点定理」と呼ばれるものです。