重心・垂心・外心・内心の位置ベクトル

　△ABCにおいて AB＝14，BC＝15，CA＝13 とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ ，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とする。

(1)　△ABCの重心 G について，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　△ABCの垂心 H について，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3)　△ABCの外接円の半径を求め，外心 O について $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(4)　△ABCの内接円の半径を求め，内心 I について $\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

＜ ’16 滋賀医科大 ＞

【戦略】

(1)　**重心は公式一発です。**

(2)　**垂心は，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくところからスタートします。**

垂心の性質から $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{b}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\end{cases}$ **ですが，実際にはどれか 2 つが言えれば十分です。**

だったら $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{b}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=0\end{cases}$ **という 2 つで処理するでしょう。**

$(\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b})\cdot\vec{a}$ **や，**$(\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b})\cdot\vec{b}$ **という形で内積をとって分配するのが楽だからです。**

(3)　**外心については「各辺の垂直二等分線の交点」と捉えます。**

これも，3 辺全て考えなくても，$\begin{cases}\text{線分 CA の垂直二等分線}\\ \text{線分 CB の垂直二等分線}\end{cases}$ **で考えれば十分です。**

線分 CA，CB **の中点をそれぞれ** M，N **として，** $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}\\ \overrightarrow{\mathrm{CN}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}\end{cases}$

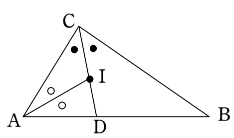
とします。

$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=p\vec{a}+q\vec{b}$ **などとおき，**$\overrightarrow{\mathrm{MO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{NO}}$ **を** $\vec{a}$，$\vec{b}$ **で表した後，**

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{NO}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

と処理します。

(4)　**内心については，内角の二等分線の交点と捉えます。**



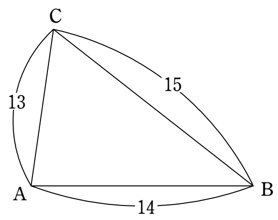
内角の二等分線の性質

AD：DB＝CA：CB

CI：ID＝CA：AD

を駆使しながら処理していきます。

【解答】



$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=14^2$ より，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=14^2$ で，

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=14^2$$

$$13^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+15^2=14^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=99$$

以上から，$\begin{cases}|\vec{a}|=13\\ |\vec{b}|=15\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=99\end{cases}$ …(＊)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CC}}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ …答

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s，t は実数）とおく。

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\end{cases}$$

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{b}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=0\end{cases}$ より，$\begin{cases}(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0\\ s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

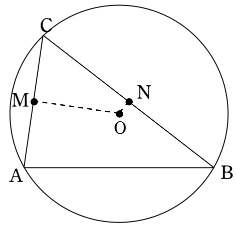
(＊) より，$\begin{cases}99(s-1)+225t=0\\ 169s+99(t-1)=0\end{cases}$

整理すると，$\begin{cases}99s+225t=99\\ 169s+99t=99\end{cases}$

これら 2 式から $s=\dfrac{99}{224}$，$t=\dfrac{55}{224}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{99}{224}\vec{a}+\dfrac{55}{224}\vec{b}$ …答

(3)　線分 CA，CB の中点をそれぞれ M，N とする。



$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}\\ \overrightarrow{\mathrm{CN}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}\end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=p\vec{a}+q\vec{b}$ （p，q は実数）とおく。

このとき，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{MO}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(p-\dfrac{1}{2}\right)\vec{a}+q\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{NO}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}-\overrightarrow{\mathrm{CN}}=p\vec{a}+\left(q-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}\end{cases}$

O は線分 CA，CB の垂直二等分線の交点であるため

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{NO}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$，　すなわち $\begin{cases}\left(p-\dfrac{1}{2}\right)|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ p\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(q-\dfrac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2=0\end{cases}$

(*) より，$\begin{cases} 169\left(p-\dfrac{1}{2}\right)+99q=0 \\ 99p+169\left(q-\dfrac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$

これを整理すると，$\begin{cases} p+\dfrac{99}{169}q=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{99}{225}p+q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

これら 2 式から，$p=\dfrac{125}{448}$，$q=\dfrac{169}{448}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\dfrac{125}{448}\vec{a}+\dfrac{169}{448}\vec{b}$ …答

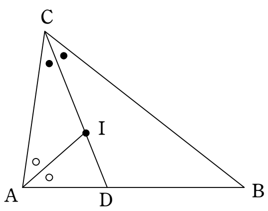
また，$\angle\mathrm{ACB}=\theta$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{33}{65}$

$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ だから，
$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2}\\&=\frac{56}{65}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=2R$，すなわち，$R=\dfrac{14}{2\cdot\dfrac{56}{65}}=\dfrac{65}{8}$ …答

(4) 直線 CI，AB の交点を D とする。



内角の二等分線の性質から

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{CA}:\mathrm{CB}$

すなわち $\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=13:15$

ゆえに，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=\frac{15\vec{a}+13\vec{b}}{13+15}\\&=\frac{15}{28}\vec{a}+\frac{13}{28}\vec{b}\end{aligned}$$

また，$\mathrm{AD}=\dfrac{13}{28}\mathrm{AB}$ であり，$\mathrm{AD}=\dfrac{13}{2}$

内角の二等分線の性質から $\mathrm{CI}:\mathrm{ID}=\mathrm{CA}:\mathrm{AD}$

すなわち
$$\begin{aligned}\mathrm{CI}:\mathrm{ID}&=13:\frac{13}{2}\\&=2:1\end{aligned}$$

これより，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CI}}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{15}{28}\vec{a}+\frac{13}{28}\vec{b}\right)\\&=\frac{5}{14}\vec{a}+\frac{13}{42}\vec{b}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

また，求める内接円の半径を r とすると

$$\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\triangle\mathrm{ABC}$$

ここで，
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot13\cdot15\cdot\frac{56}{65}\\&=84\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{r}{2}(14+15+13)=84$，すなわち $21r=84$

$\therefore$ 求める内接円の半径は 4 …答

【総括】

重心，垂心，外心，内心がこれ１題で全て詰まっているというコスパの良い問題です。

垂心と外心は最初に $\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b}$ とおいてからスタートするのに対して

内心は，「繋いだり縮めたり」して求める

と，導出のニュアンスが若干異なります。

なお，外心において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ という処理も目に付きやすいと思いますが，位置ベクトルを求めるだけならば，今回の方針の方が楽です。

※ もちろん外心という点の特徴として $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を活かしながら解く問題もあります。

なお，今回はシナリオは基本的なものですが，計算（算数）の部分が鬱陶しいものでした。

試験場だと，最後まで結論を一致させるのは案外難しいと思います。

－－－－－－－－－－－－－－－（余談）－－－－－－－－－－－－－－－－

(2) の垂心を求める際の連立方程式 $\begin{cases} 99s+225t=99 \\ 169s+99t=99 \end{cases}$ を解いてみると

$99s+225t=169s+99t$ で，$70s=126t$，すなわち $s=\dfrac{9}{5}t$

$99\cdot\dfrac{9}{5}t+225t=99$ で，分母を払うと $891t+1125t=495$

これより，$2016t=495$，すなわち $t=\dfrac{495}{2016}\left(=\dfrac{55}{224}\right)$ で，$s=\dfrac{99}{224}$

これを狙って2016年度に出題したのなら大したものです