(1) 極座標表示された複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ が
$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ をみたすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2) n を自然数とするとき，$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2$ を r，θ，n を用いて表せ。

(3) 複素数 z が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ をみたすならば，すべての自然数 n に対し，$|1+z+\cdots\cdots+z^n|<1$ が成り立つことを示せ。

＜ '00 東京工業大 ＞

【戦略】

(1) **複素数 α の絶対値 $|\alpha|$ の扱いは**

・ $\alpha=x+yi$ などとおいて，$|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2}$ と実部虚部を持ち出す

・ $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$

という路線があります。

今回は共役複素数を持ち出してもあまり美味しそうには見えません。

極形式とは言え，$r\cos\theta$，$r\sin\theta$ という立派な実部虚部がありますから，素直に実部虚部を用いて大きさを処理していきます。

(2) **「……」を何とか処理したいということで，等比数列の和と見ます。**

途中シンドイ計算が襲ってきますが，工夫で乗り切ります。
（工夫の内容は【解答】の中に注釈を入れる形で解説します。）

(3) **(2) の結論を正しく出せると**

$$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2=\begin{cases}(n+1)^2 & (z=1\text{ のとき})\\ \dfrac{(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1} & (z\fallingdotseq 1\text{ のとき})\end{cases}$$

という結論を得ます。

$z=1$ **は** $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ **を満たしませんから，考える必要はありません。**

そうなると $\dfrac{(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}<1$ **を目指すことになります。（この時点でゲロはきそうです。）**

分母を払っても見通しが劇的に変わりそうにありません。

左辺を「いじって」1 より小さくなることを目指すのは得策ではなさそうです。

なので，等式を諦め，不等式を繋ぐ「評価」を考えます。

今回の r は $0<r<1$ で，「かければかけるほど小さくなる」わけです。

示すべき不等式の左辺をよく観察し，

次数的に分子の方が小さくない？
だとしたら 1 未満に決まってるじゃん。

と看破できれば，大きくしようという気持ちで評価していけます。

【解答】

(1) $z+\dfrac{1}{2}=\left(r\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)+i(r\sin\theta)$

$$\begin{aligned}\left|z+\frac{1}{2}\right|^2&=\left(r\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+r^2\sin^2\theta\\&=r^2\cos^2\theta+r\cos\theta+\frac{1}{4}+r^2\sin^2\theta\\&=r^2+r\cos\theta+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たす必要十分条件は $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|^2<\dfrac{1}{4}$

これより，$r^2+r\cos\theta+\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{4}$ で，これを整理すると

$$r(r+\cos\theta)<0$$

$r>0$ より，$r+\cos\theta<0$

以上から，求める必要十分条件は $r+\cos\theta<0$ …答

(2) $1+z+\cdots\cdots+z^n=\begin{cases}n+1 & (z=1\text{ のとき})\\ \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} & (z\fallingdotseq 1\text{ のとき})\end{cases}$

(i) $z=1$ のとき，$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2=(n+1)^2$

(ii) $z\fallingdotseq 1$ のとき

一般の複素数 α について，

$$\begin{aligned}|\alpha-1|^2&=(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)\\&=\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})+1\\&=|\alpha|^2-2\cdot\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}+1\\&=|\alpha|^2-2\,\mathrm{Re}(\alpha)+1\end{aligned}$$
（$\mathrm{Re}(\alpha)$ は α の実部を表す）

同じような計算を何度も相手にするのはしんどいので先に一般論を計算してしまいます。

よって，$|z-1|^2=|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)+1$
$=r^2-2r\cos\theta+1$ …①

また，ド・モアブルの定理から，

$$z^{n+1}=r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}$$

であり，$\begin{cases}|z^{n+1}|=r^{n+1}\\ \mathrm{Re}(z^{n+1})=r^{n+1}\cos(n+1)\theta\end{cases}$

$$\begin{aligned}|z^{n+1}-1|^2&=|z^{n+1}|^2-2\,\mathrm{Re}(z^{n+1})+1\\&=(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1\ \cdots②\end{aligned}$$

$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2=\dfrac{|z^{n+1}-1|^2}{|z-1|^2}$ であり，①，② より

$$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2=\frac{(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}$$

以上 (i)，(ii) より

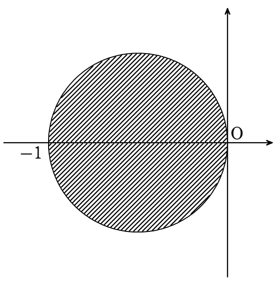
$$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2=\begin{cases}(n+1)^2 & (z=1\text{ のとき})\\ \dfrac{(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1} & (z\fallingdotseq 1\text{ のとき})\end{cases}\ \cdots\text{答}$$

(3) $z=1$ は $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たさないので，$z\fallingdotseq 1$ のときを考えれば十分。

示すべきことは $|1+z+\cdots\cdots+z^n|<1$，すなわち

$$\frac{(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}<1$$

ここで $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たす複素数 z が表す点を複素数平面に図示すると以下の図のようになる。



ゆえに，$0<r<1$

$$\begin{aligned}
\frac{(r^{n+1})^2+2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1} &\leqq \frac{(r^{n+1})^2+2r^{n+1}+1}{r^2-2r\cos\theta+1}\\
&=\frac{r^{n+1}\cdot r^{n+1}+2r^{n+1}+1}{r^2-2r\cos\theta+1}\\
&<\frac{r^{n+1}+2r^{n+1}+1}{r^2-2r\cos\theta+1}\\
&=\frac{3r^{n+1}+1}{r^2+2r(-\cos\theta)+1}\\
&<\frac{3r^{n+1}+1}{r^2+2r\cdot r+1}\quad (\because\ (1))\\
&=\frac{3r^{n+1}+1}{3r^2+1}\\
&\leqq\frac{3r^2+1}{3r^2+1}\ (=1)
\end{aligned}$$

かけない方が大きいです。

となり，題意は示された。

【総括】

なまじ色々見えてしまいます。

１の累乗根を彷彿とさせたり，「何かあるのか」と思わせるような設定でした。

試験場だと (2) の結論の汚さを見て疑心暗鬼になりそうです。

(3) については $\dfrac{(r^{n+1})^2-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}$ と格闘していても限界があります。

【戦略】でも述べたように「分子の方が小さくないか？」と思えれば不等式を繋ごうという気が少しは出てくるでしょう。