整数を係数とする多項式 $f(x)$ について次のことを証明せよ。

(1) 任意の整数 m , n に対し , $f(n+m)-f(n)$ は m の倍数であることを示せ。

(2) 任意の整数 k , n に対し , $f(n+f(n)k)$ は $f(n)$ の倍数であることを示せ。

(3) 任意の整数 n に対し , $f(n)$ が素数ならば , $f(x)$ は定数であることを示せ。

＜ '02 慶應義塾大 ＞

【戦略】

(1) **$f(x)$ が N 次の多項式 ($N=0, 1, 2, \cdots\cdots$) とすると**

$f(x)=a_N x^N+a_{N-1}x^{N-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ ($a_0 \sim a_N$ は整数)
とおくことができ ,

$f(x)-f(y)=a_N(x^N-y^N)+a_{N-1}(x^{N-1}+y^{N-1})+\cdots\cdots+a_1(x-y)$

という形となります。

x^u-y^u **という形は**

$x^u-y^u=(x-y)(x^{u-1}+x^{u-2}y+\cdots\cdots+xy^{u-2}+y^{u-1})$

と , $(x-y)(\qquad)$ **という形に因数分解できるので ,**

$f(x)-f(y)=(x-y)(\qquad\quad)$ **という形で因数分解できることになります。**

(2) **(1) の主張において ,** $m=f(n)k$ **とすると , 直ちに題意が示せます。**

(3) **直接定数関数ということを示すのは難儀です。**

そこで , まずは大枠として背理法を睨みます。

認識したいのは , f(整数) **という形をしていたら , それは素数です。**

(2) の結果は $f(n+f(n)k)=f(n)\cdot M$ (M は整数) **という形になっていることを意味します。**

つまり , (素数)$=$(素数)$\cdot M$ **という形となるため ,** $M=1$ **となるしか逃げ道がなくなるわけです。**

これより , $f(n+f(n)k)=f(n)$ **を得ます。**

$f(n)=p$ (p : 素数) **とすると ,** $f(n+pk)=p$ **です。**

これは , N **次方程式** $f(x)=p$ **の解が**

$$n+p,\ n+2p,\ n+3p,\ \cdots\cdots$$

と , 無数にあることになってしまいます。

【解答】

(1) $f(x)$ が N 次の多項式として ($N=0, 1, 2, \cdots\cdots$)

$f(x)=a_N x^N+a_{N-1}x^{N-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ ($a_0 \sim a_N$ は整数)

とおく。

ここで , $x^u-y^u=(x-y)(x^{u-1}+x^{u-2}y+\cdots\cdots+xy^{u-2}+y^{u-1})$

x , y が整数 , u が自然数のとき ,

x^u-y^u は $x-y$ を因数にもつ。… ①

$f(x)-f(y)=a_N(x^N-y^N)+a_{N-1}(x^{N-1}+y^{N-1})+\cdots\cdots+a_1(x-y)$
$=(x-y)g(x, y)$ ($g(x, y)$ は x , y の整数係数多項式) (∵ ①)

よって , $f(n+m)-f(n)=\{(n+m)-n\}\cdot g(n+m, n)$
$=m\cdot g(n+m, n)$ … ②

$g(n+m, n)$ は整数なので , $f(n+m)-f(n)$ は m の倍数である。

(2) ② において , $m=f(n)k$ とすると

$$f(n+f(n)k)-f(n)=f(n)k\cdot g(n+m, n)$$

$$f(n+f(n)k)=f(n)\{kg(n+m, n)+1\}$$
$$=f(n)\cdot(\text{整数})$$

という形となるため , $f(n+f(n)k)$ は $f(n)$ の倍数である。

(3) $f(x)$ が定数関数でない N 次式と仮定する。

(2) の結果から , 任意の整数 n , k に対して

$$f(n+f(n)k)=f(n)\cdot M\ (M \text{ は整数})$$

と表せる。

f(整数) という形となるものは全て素数であるため ,

(素数)$=$(素数)$\cdot M$ という形となり , $M=1$ である。

ゆえに $f(n+f(n)k)=f(n)$

$f(n)=p$ (p は素数) とすると

$$f(n+pk)=p$$

これは N 次方程式 $f(x)=p$ が

$$x=n+p,\ n+2p,\ n+3p,\ \cdots\cdots$$

と無数の実数解をもつことになってしまい , 矛盾する。

以上から , 任意の整数 n に対し , $f(n)$ が素数のとき , $f(x)$ は定数である

【総括】

本問にまつわるエピソードとして，オイラーの見つけた

$$f(x)=x^2+x+41$$

という関数があります。

これに $x=0$，1，2，…… を代入していくと

$$f(0)=41\ ,\ f(1)=43\ ,\ f(2)=47\ ,\ f(3)=53\ ,\ \cdots\cdots$$

とずっと素数が続きます。

$x=40$ のとき，

$$f(40)=1681=41^2$$

と素数ではなくなってしまいますが，結構な長さで素数を生成し続けてくれました。

数学者にとって永遠に素数を生成し続ける「素数生成多項式」を見つけたいと思うのは当然です。

ただ，残念なことに，ルジャンドルという数学者によって，
「有理数係数の多項式でそのような素数生成多項式は定数関数以外には存在しない」
ということを証明されてしまいました。