n を自然数とする。半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を互いに重なり合わないように半径 1 の円に外接させる。

このとき，外接する円の最大個数を a_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

＜ '82 東京工業大 ＞

【戦略】

今回の θ_n は変化するため，θ_n そのものの評価はできませんが，

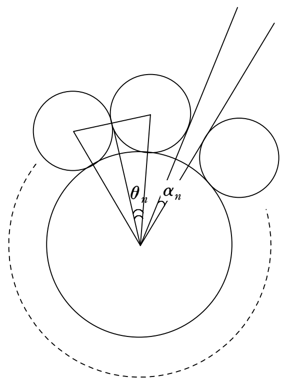
隙間の角度

に注目して，a_n を評価していきます。

隙間の角度 α_n は $\alpha_n=2\pi-(2\theta_n\cdot a_n)$ です。

隙間である以上，$0\leqq\alpha_n<2\theta_n$ で収まっていますから，a_n も評価できるというわけです。

【解答】



図のように θ_n をおくと，

$$\sin\theta_n=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}\quad\cdots\cdots①$$

１つ目の円と最後の円の隙間の角度 α_n に注目すると，

$$\alpha_n=2\pi-(2\theta_n\cdot a_n)$$

$0\leqq\alpha_n<2\theta_n$ より，

$$0\leqq2\pi-2\theta_n a_n<2\theta_n$$

$$\Leftrightarrow\ -2\pi\leqq-2\theta_n a_n<2\theta_n-2\pi$$

$$\Leftrightarrow\ 2\pi-2\theta_n<2\theta_n a_n\leqq2\pi$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\pi}{\theta_n}-1<a_n\leqq\frac{\pi}{\theta_n}$$

これより，$\dfrac{\pi}{n\theta_n}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{a_n}{n}\leqq\dfrac{\pi}{n\theta_n}$ ……② を得る。

① より，$n=\dfrac{1}{\sin\theta_n}-1$ であるから $n\theta_n=\dfrac{\theta_n}{\sin\theta_n}-\theta_n$

$n\to\infty$ のとき $\theta_n\to0$ であるから，

$$n\theta_n=\frac{1}{\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}}-\theta_n\ \to\ \frac{1}{1}-0=1\quad(n\to\infty)$$

② において

$$(\text{最左辺})\to\frac{\pi}{1}-0=\pi\quad(n\to\infty),\ (\text{最右辺})\to\frac{\pi}{1}=\pi\ (n\to\infty)$$

ゆえに，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$ …答

【総括】

最終的なオチが

はさみうちの原理

ということは最初から見越しておきたいところです。

それが a_n を評価しようという気持ちに繋がり，手を動かす原動力となります。