長さ 4 の線分 AB を直径とする半円を考える。弧 AB 上に点 A から距離が 1 の点 P_1 をとる。

次に弧 P_1B 上に点 P_1 から距離が 1 の点 P_2 をとる。このように次々と点 B に向かって点 P_k を定めていき，点 P_n まで定められ，点 P_{n+1} は定められなかったとする。

(1) n の値を求めよ。

(2) 三角形 P_kAB（$k=1, 2, \cdots\cdots, n$）のうち，その面積が最大となる k の値を求めよ。また，その面積の最大値を求めよ。

＜ '95 お茶の水女子大 ＞

【戦略】

(1) **結局「$n\theta<\pi<(n+1)\theta$」となる n を見つけることになります。**

そのために

「θ が大体どのぐらいの大きさなのか」

を把握しにいきます。

絵を書いてみると，おおよそ様子が掴めてくるでしょう。

(2) **題意の面積が $4\sin k\theta$ であることを考えれば結局**

$\sin k\theta$ の最大値

が分かればおしまいです。

$\sin x$ は鋭角の範囲では単調増加，鈍角の範囲では単調減少です。

そして，3θ までは鋭角，4θ からは鈍角だと突き止めれば，あとは

$$\sin\theta<\sin 2\theta<\sin 3\theta \boxed{?} \sin 4\theta>\sin 5\theta>\sin 6\theta$$

の $\boxed{?}$ に入る不等号を考えればよいということになります。

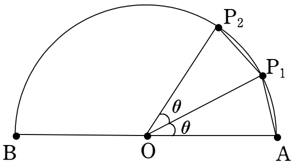
手間かもしれませんが，どのみち面積の計算で $\sin 3\theta$ を計算することになるのですから，これが一番確実でしょう。

【解答】

(1) (図 1) のように

$\angle AOP_1=\angle P_1OP_2=\cdots\cdots=\angle P_{n-1}OP_n=\theta$

（$0<\theta<\pi$）と定める。



(図 1)

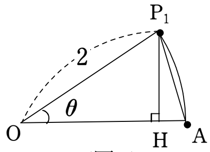
$\triangle OAP_1$ で余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{7}{8}\quad（\cos\theta>0 \text{ より，} 0<\theta<\frac{\pi}{2} \cdots ①）$$

ゆえに，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

さて，(図 2) において $\overset{\frown}{AP_1}>AP_1$ より，

$2\theta>1$，すなわち $\frac{1}{2}<\theta \cdots ②$



(図 2)

一方，$AP_1>P_1H$ より，$1>2\sin\theta$，すなわち $\sin\theta<\frac{1}{2}$

① を考えると， $\theta<\frac{\pi}{6} \cdots ③$

②，③ より $\frac{1}{2}<\theta<\frac{\pi}{6} \cdots (*)$

右側の不等式から，$6\theta<\pi$.

一方，左側の不等式から，$\frac{7}{2}<7\theta$ であり，$\pi<\frac{7}{2}$ を考えると，

$$\pi<7\theta$$

ゆえに，$6\theta<\pi<7\theta$ であるため，求める n は $n=6$ …答

(2) $(*)$ より $\frac{3}{2}<3\theta<\frac{\pi}{2}$， $\left(\frac{\pi}{2}<\right)2<4\theta<\frac{2}{3}\pi$

ゆえに，θ，2θ，3θ は鋭角であり，4θ，5θ，6θ は鈍角 .

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\\&=3\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}-4\cdot\frac{15\sqrt{15}}{512}\\&=\frac{132\sqrt{15}}{512}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 4\theta&=2\sin 2\theta\cos 2\theta\\&=4\sin\theta\cos\theta\,(2\cos^2\theta-1)\\&=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\left\{2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2-1\right\}\\&=\frac{119\sqrt{15}}{512}\end{aligned}$$

ゆえに，$\sin\theta<\sin 2\theta<\sin 3\theta>\sin 4\theta>\sin 5\theta>\sin 6\theta$

$$\begin{aligned}\triangle P_kAB&=\frac{1}{2}\times AB\times 2\sin k\theta\\&=4\sin k\theta\quad（k=1, 2, 3, 4, 5, 6）\end{aligned}$$

ゆえに，$k=3$ のとき $\triangle P_kAB$ の面積は最大となり，その最大値は

$$4\sin 3\theta=4\cdot\frac{132\sqrt{15}}{512}=\frac{33\sqrt{15}}{32} \cdots 答$$

【総括】

丁寧に図を書いてみると，$n=6$ というのは予想が付くと思います。

そうなると，$\theta<\dfrac{\pi}{6}$ であることが予想されるわけです。

難しいのは，$7\theta>\pi$ となることをどのように言うかです。

つまり，$\theta>\dfrac{\pi}{7}$ を言う必要がありますが，$\dfrac{\pi}{7}$ は有名角ではありません。

$\dfrac{\pi}{7}$ より大きく $\dfrac{\pi}{6}$ より小さい有名角はないため，

角度 θ を弧長 θ と見直す

というのが【解答】の根幹にある思想です。

弧度法の威力が実感できると思います。