いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

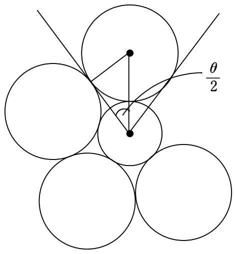
(2) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

＜ '08 九州大 ＞

【戦略】

(1) **図示すると，**



という直角三角形が見えますから，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$ が即分かり，

2 倍角の公式から $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ ですから，解決です。

(2) **裸の角度に対して，できることはほとんどありません。**

よって，$\cos\dfrac{\pi}{2}<\cos\theta<\cos\dfrac{\pi}{3}$ を目指すことにします。

$\cos$ の服を着せるのは，$0<x<\pi$ の範囲で $\cos x$ は単調減少であり，大小を比較する上で，$\sin$ よりもやり扱いやすいからです。

(3) **(1) の θ はいわば「円 1 個が占める幅」という感覚です。**
（幅というと語弊がありますが，敢えてこういう表現にします。）

n 個まで配置できるということは

$$n\theta\leqq 2\pi<(n+1)\theta$$

を満たすギリギリの（最大の）n を見出すということです。

(2) の θ に関する評価から，$2\pi<6\theta$ となり，$n=6$ はアウトです。

$n=4$ は $\dfrac{4}{3}\pi<4\theta<2\pi$ なので，OK です。

そうなると，$n=5$ が OK なのかダメなのかが決め手となります。

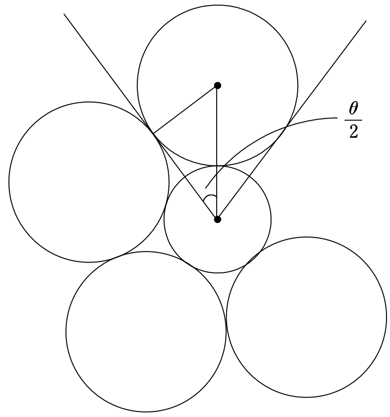
5θ が 2π を超えているかが問題なので，5θ と 2π の大小
すなわち，θ と $\dfrac{2}{5}\pi$ の大小を比べることになります。

そうなると，$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の値を出す必要がありますが，これについては経験が必要です。

解答では，若干天下り形式でまとめていきます。

【解答】

(1)



$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{3+2}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}\quad\cdots 答$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos\theta&=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\\&=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1\\&=\frac{7}{25}\end{aligned}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta=\frac{1}{2}-\frac{7}{25}=\frac{9}{25}>0$$

一方，$\cos\theta>\cos\dfrac{\pi}{2}$（$=0$）

ゆえに，$\cos\dfrac{\pi}{2}<\cos\theta<\cos\dfrac{\pi}{3}$

$0<x<\pi$ の範囲では，$y=\cos x$ は単調減少であるため

$$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

が成立する。

(3) $n\theta \leqq 2\pi < (n+1)\pi$ …(*) を満たす最大の正の整数 n を求めればよい。

$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ …① の両辺を 6 倍すると，$2\pi < \theta\ (< 3\pi)$ であり $n=6$ とすると (*) を満たさない。

ゆえに，$n \leqq 5$ である必要がある。

次に $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ を求める。

$\dfrac{2}{5}\pi = \alpha$ とすると，$5\alpha = 2\pi$ であり，$3\alpha = 2\pi - 2\alpha$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha$$

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$4\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 0$$

$$(\cos\alpha - 1)(4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1) = 0$$

$0 < \cos\alpha < 1$ であるため，$\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

ここで

$$\begin{aligned}\cos\alpha - \cos\theta &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{7}{25} \\ &= \frac{-25+25\sqrt{5}-28}{100} \\ &= \frac{\sqrt{3125}-\sqrt{2809}}{100} > 0\end{aligned}$$

ゆえに，$\cos\alpha > \cos\theta$，すなわち，$\dfrac{2}{5}\pi < \theta$

これより，$2\pi < 5\theta$ となり，$n=5$ は (*) を満たさない。

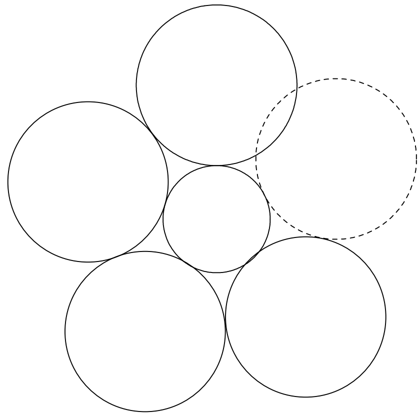
また，① の両辺を 4 倍すると，$\dfrac{4}{3}\pi < 4\theta < 2\pi\ (< 5\theta)$

つまり，$n=4$ は (*) を満たす。

以上から，求める最大個数は 4 個 … 答

【総括】

丁寧に図を書いてみると，4 個というのは予想が付くと思います。



n 個配置できるということを

$$n\theta \leqq 2\pi < (n+1)\pi$$

と数式的に翻訳できるかどうかにかかってきます。

最終的には $\cos\dfrac{2}{5}\pi\ (=\cos 72^\circ)$ の導出に帰着するわけですが，これはテーマ性があり，様々な導出方法があります。

有名なのは「黄金三角形の黄金分割」を用いる方法ですが，説明や記述が面倒なので，数式的にゴリゴリ記述するだけで済む方法で今回は解きました。

問題を解く中で必要に迫られて導出するという場面では，今回の導出法が一番気が楽（記述しやすい）です。（個人差はあるでしょうが）