　1辺の長さが2の正四面体ABCDがある。Gを三角形BCDの重心，Hを三角形ACDの重心，直線AGとBHの交点をOとする。

(1)　$\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

(2)　点Pがこの四面体上を動くとき，$AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$ のとり得る値の範囲を求めよ。

＜ '99 東北大 ＞

【戦略】

(1)　**3次元空間では，「1つの始点，3つの基底」という言葉通り $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いてその他の登場人物を表していきます。**

Oは直線AG，BHの交点であり， $\begin{cases} \text{直線 AG 上} \\ \text{直線 BH 上} \end{cases}$ **という2点を翻訳すればよいでしょう。**

直線AG上ということについては $\overrightarrow{AO}=k\,\overrightarrow{AG}$

直線BH上ということについては $\overrightarrow{AO}=(1-t)\,\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AH}$

と翻訳します。

(2)　**今度は始点をOとして考えていきます。**

Oは，A，B，C，Dから見て対等な立場であり，対称性の高い今回の式を扱うにあたり，始点がOの方が考えやすいのです。

$|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2+|\overrightarrow{DP}|^2$

$=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}|^2$

として計算を進めるうえで必要な

$|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OB}|$，$|\overrightarrow{OC}|$，$|\overrightarrow{OD}|$ **などの情報を揃えにいきます。**

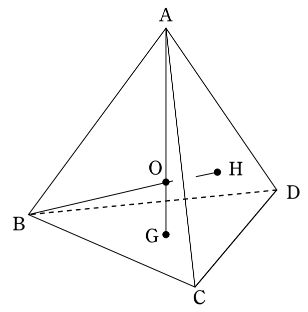
なお，2乗展開の際のクロスタームは $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ **によって消えてしまいます。**

そうなると，結局は

$$|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2+|\overrightarrow{DP}|^2=4\,|\overrightarrow{OP}|^2+(\text{定数})$$

という形となるため，$|\overrightarrow{OP}|$ **がとり得る最大と最小を捉えることに集中すればよいでしょう。**

【解答】



(1)　Gが△BCDの重心，Hが△ACDの重心という条件より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

今，Oは直線AG上より，$\overrightarrow{AO}=k\,\overrightarrow{AG}$ (k は実数) と表せる。

ゆえに，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{k}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{AD}$ …①

一方，Oは直線BH上の点でもあるため，BO：OH$=t:1-t$ とおくことにより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}&=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AH}\\&=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AD}\ \cdots②\end{aligned}$$

と表せる。

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ は1次独立なので，①，②より

$\begin{cases} \dfrac{k}{3}=1-t \\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{t}{3} \end{cases}$ で，これら2式から，$k=\dfrac{3}{4}$，$t=\dfrac{3}{4}$

ゆえに，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ …答

(2)　対称性から $\begin{cases} \overrightarrow{BO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{DO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \end{cases}$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO})$$
$$=\vec{0}$$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=2$

$$|\overrightarrow{AO}|^2=\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right|^2$$

$$=\frac{1}{16}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2)+\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{16}(4+4+4)+\frac{1}{8}(2+2+2)$$

$$=\frac{3}{2}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{ゆえに，} |\overrightarrow{AO}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \\ \text{対称性から，} |\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{DO}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\}(*)$

さて，

$$|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2+|\overrightarrow{DP}|^2$$

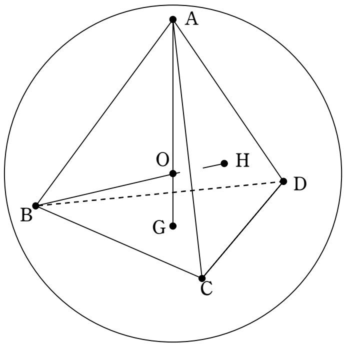
$$=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}|^2$$

$$=4|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$$

$$=4|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{3}{2}\cdot 4 \quad (\because\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0})$$

$$=4|\overrightarrow{OP}|^2+6 \quad \cdots(☆)$$

(*) より，この正四面体は O を中心とする半径 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ の球に内接する。



(☆) より，

$$|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2+|\overrightarrow{DP}|^2 \text{ が最大 (最小)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$|\overrightarrow{OP}| \text{ が最大 (最小)}$$

$|\overrightarrow{OP}|$ が最も大きくなるときは，P が A，B，C，D のどれかに一致するとき

$|\overrightarrow{OP}|$ が最も小さくなるときは，P が O から四面体 ABCD の各面に下ろした垂線の足，すなわち各面の重心と一致するとき

ゆえに，$|\overrightarrow{OG}|\leqq|\overrightarrow{OP}|\leqq|\overrightarrow{OA}|$

ここで，(1) の途中経過より，$k=\frac{3}{4}$，すなわち $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$

これより，AO : OG＝3 : 1 であり

$$|\overrightarrow{OG}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

よって，$\frac{\sqrt{6}}{6}\leqq|\overrightarrow{OP}|\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}$

したがって，$\frac{20}{3}\leqq 4|\overrightarrow{OP}|^2+6\leqq 12$，すなわち

$$\frac{20}{3}\leqq AP^2+BP^2+CP^2+DP^2\leqq 12 \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

いたるところにある対称性をうまく活用しましょう。

点 P がこの四面体上を動くと聞くとギョッとしますが，対称性を考えると「ある一面上を動く」と考えて差し支えありません。

さらに，対称性の中心 O からの距離のみに依存するということもよくよく考えれば当然です。