$a$ は $0$ ではない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる $a$ の値を求めよ。

＜ '98 東京大 ＞

**【戦略】**

**定数部分が複雑である意味はありません。**

**展開するにせよ，汚い形のまま展開するのはイヤなので，** $-a+\dfrac{1}{a}=b$ **とゴム手袋をつけて**

$$f(x)=(3x^2-4)(x+b)$$

**として進めていきます。**

**極大値と極小値の差については，【類題 1】の【解 2】で紹介した**

**定積分として見る**

**という路線で処理します。**

【解答】

$-a+\dfrac{1}{a}=b$ とおくと，$f(x)=(3x^2-4)(x+b)$
$=3x^3+3bx^2-4x-4b$

$$f'(x)=9x^2+6bx-4$$

$f'(x)=0$ の判別式を $D$ とすると，$\dfrac{D}{4}=9b^2+36$ で，実数 $b$ の値に関わらず，$\dfrac{D}{4}>0$

よって，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$ をもつ。

| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

極大値と極小値の差は $f(\alpha)-f(\beta)$ である。

$$\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta)&=\Big[f(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}\\
&=\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)\,dx\\
&=-\int_{\alpha}^{\beta}(9x^2-6bx-4)\,dx\\
&=-\int_{\alpha}^{\beta}9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=-9\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\
&=\frac{3}{2}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{3}{2}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

解と係数の関係から，$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}b\\ \alpha\beta=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$ であり，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{3}{2}\left\{\frac{4}{9}b^2+\frac{16}{9}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

よって，$f(\alpha)-f(\beta)$ は $b=0$ のときに最小となる。

このとき，$-a+\dfrac{1}{a}=0$ であり，$a^2=1$

ゆえに，求める $a$ の値は $a=\pm1$ …答

【総括】

$-a+\dfrac{1}{a}$ のまま計算を進めるのは得策ではありません。

「汚物に直接触れない」ということは本問に限らず重要な工夫の一つです。

定積分と見る工夫が試験場で飛んでしまった場合は

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta)&=3(\alpha^3-\beta^3)+3b(\alpha^2-\beta^2)-4(\alpha-\beta)\\
&=3(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+3b(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-4(\alpha-\beta)\\
&=(\alpha-\beta)\{3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+3b(\alpha+\beta)-4\}\\
&=(\alpha-\beta)\{3\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+3b(\alpha+\beta)-4\}\\
&=(\alpha-\beta)\left\{3\left\{\frac{4}{9}b^2+\frac{4}{9}\right\}+3b\left(-\frac{2}{3}b\right)-4\right\}\\
&=(\alpha-\beta)\left\{-\frac{2}{3}b^2-\frac{8}{3}\right\}\\
&=\frac{2}{3}(\beta-\alpha)(b^2+4)\\
&=\frac{2}{3}\sqrt{(\beta-\alpha)^2}\,(b^2+4)\\
&=\frac{2}{3}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\,(b^2+4)\\
&=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{9}(b^2+4)}\,(b^2+4)\\
&=\frac{4}{9}(b^2+4)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

と，対称式や交代式の工夫で真正面からぶつかることになります。

やってできなくはありませんね。

ただ，$b=-a+\dfrac{1}{a}$ というゴム手袋をつけていなかったらと思うとゾッとします。