k を実数の定数として，x の３次関数

$$f(x)=x^3-3x^2+kx+7$$

について，次の (1)，(2)，(3) に答えよ。

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつときの k の値の範囲を求めよ。

(2)　$f'(x)=0$ の２つの解を s，t とするとき，$(t-s)^2$ を k を用いて表せ。

(3)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 のとき，定数 k の値を求めよ。

＜ ’07 西南学院大 ＞

【戦略 1】

(1)　**$y=f(x)$ のグラフが極大値，極小値をとるので**

$f'(x)$ が正から負，負から正と符号変化を起こす

ということをしっかり記述しましょう。

今回は $y=f'(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるため，符号変化を起こすには，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいということになります。

(2)　**この程度であれば，解の公式で $f'(x)=0$ の解を直接計算してもタカがしれていますが，後々の (3) で必要となる解と係数の関係から仕留めていきます。**

(3)　**(2) において $s<t$ とすれば $f(s)$ が極大値，$f(t)$ が極小値となります。**

よって，$f(s)-f(t)$ を計算し，$f(s)-f(t)=32$ という条件から仕留めます。

$f(s)-f(t)$ は

$$f(s)-f(t)=(s^3-t^3)-3(s^2-t^2)+k(s-t)$$

となりますが，将来的に $s-t$ で括れることが見えており，(2) の結果から $s-t$ も得られる見通しは立つでしょう。

【解 1】

(1)　$f'(x)=3x^2-6x+k$

$y=f(x)$ のグラフが極大値，極小値をとるので

$f'(x)$ が正から負，負から正と符号変化を起こす

$y=f'(x)$ のグラフが下に凸の放物線であることをふまえると

$3x^2-6x+k=0$ …(*) の判別式を D として，$\dfrac{D}{4}>0$

ゆえに，$(-3)^2-3k>0$ であり，これを解くと，$k<3$ …答

(2)　(*) の 2 つの実数解を s，t であり，解と係数の関係から

$$\begin{cases} s+t=2 \\ st=\dfrac{k}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(t-s)^2&=(s+t)^2-4st\\&=2^2-4\cdot\frac{k}{3}\\&=\frac{4(3-k)}{3}\ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

(3)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつので，(1) より $k<3$

このとき，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 s，t をもつ。

$s<t$ とすると

x	$\cdots$	s	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$\begin{aligned}f(s)-f(t)&=(s^3-t^3)-3(s^2-t^2)+k(s-t)\\&=(s-t)(s^2+st+t^2)-3(s+t)(s-t)+k(s-t)\\&=(s-t)\{(s^2+st+t^2)-3(s+t)+k\}\\&=(s-t)\{(s+t)^2-st-3(s+t)+k\}\\&=(s-t)\left\{2^2-\frac{k}{3}-3\cdot2+k\right\}\\&=2(s-t)\cdot\frac{k-3}{3}\\&=2\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-k}\right)\cdot\frac{k-3}{3}\quad(\because (2)\text{および } s<t)\\&=\frac{4\sqrt{3}}{9}(3-k)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

条件 $f(s)-f(t)=32$ より，$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}(3-k)^{\frac{3}{2}}=32$

これより $(3-k)^{\frac{3}{2}}=24\sqrt{3}\left(=2^3\cdot3^{\frac{3}{2}}\right)$ で，$3-k=\left(2^3\cdot3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=12$

よって，$k=-9$ …答

【戦略 2】(3) について

極大値と極小値の差については工夫の余地があり

$$f(s)-f(t)=\Big[f(x)\Big]_t^s=\int_t^s f'(x)\,dx$$

と，定積分を逆方向で見るという方針もあります。

経験がモノをいう発想です。

【解 2】(3) について

$f(x)$ が極大値と極小値をもつので，(1) より $k<3$

このとき，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 s，t をもつ。

$s<t$ とすると

x	$\cdots$	s	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，極大値と極小値の差は $f(s)-f(t)$

$$\begin{aligned}
f(s)-f(t)&=\Big[f(x)\Big]_t^s\\
&=\int_t^s f'(x)\,dx\\
&=\int_t^s (3x^2-6x+k)\,dx\\
&=\int_t^s 3(x-s)(x-t)\,dx\\
&=3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(s-t)^3\right\}\\
&=\frac{1}{2}(t-s)^3\\
&=\frac{1}{2}\left\{(t-s)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{4(3-k)}{3}\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}(3-k)^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{4\sqrt{3}}{9}(3-k)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ **の解が** s，t **です。**

条件 $f(s)-f(t)=32$ より，$\frac{4\sqrt{3}}{9}(3-k)^{\frac{3}{2}}=32$

これより $(3-k)^{\frac{3}{2}}=24\sqrt{3}\ \left(=2^3\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)$ で，$3-k=\left(2^3\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=12$

よって，$k=-9$ … 答

【総括】

3 次関数の極大値の差については対称式ではないものの，それに準ずる形で計算に工夫の余地があります。

【解 1】の路線は割と真正面からぶつかる方針であり，王道的な路線です。

【解 2】の路線は有名な工夫の一つで破壊力がある反面，経験がないとゼロから思いつくのは厳しいでしょう。