関数 $f(x)=2x^3+3px^2+3px-\dfrac{3}{2}p^2$ は，$x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$ を，$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとる。ただし，p は実数とする。

(1) p の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) $f(\alpha)+f(\beta)$ を p を用いて表せ。

(3) 2 点 $(\alpha, f(\alpha))$，$(\beta, f(\beta))$ を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ。
また，そのグラフをかけ。

＜ '08 南山大 ＞

【戦略 1】

(1) **$y=f(x)$ のグラフが極大値，極小値をとるので**

$f'(x)$ が正から負，負から正と符号変化を起こす

ということをしっかり記述しましょう。

今回は $y=f'(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるため，符号変化を起こすには，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいということになります。

(2) $f(\alpha)+f(\beta)=2(\alpha^3+\beta^3)+3p(\alpha^2+\beta^2)+3p(\alpha+\beta)-3p^2$

と，α，β の対称式であることを利用した方針が王道的でしょう。

基本対称式 $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ については，α，β の出所である 2 次方程式 $f'(x)=0$ からの解と係数の関係で Get します。

(3) **$(\alpha, f(\alpha))$，$(\beta, f(\beta))$ を結ぶ線分の中点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$ ですから，(2) を利用することになります。**

軌跡の基本，
(X, Y) とおいて X，Y の関係式を Get しにいく
という路線です。

今回は $\begin{cases} X=-\dfrac{p}{2} \\ Y=\dfrac{1}{2}p^3-3p^2 \end{cases}$ **という式が得られますから，ここから X，Y の関係式を Get しにいくには，当然 p を消去します。**

文字が消える際に気を付けたいのは「遺産の整理」ということです。

p は消えてしまいますが，生前持っていた (1) で得ている条件式 $p<0$，$2<p$ を，X に引き継がせます。

感覚的には，p が縛られているのだから，それに伴って動く X，Y だって縛られるに決まっている

と考えれば，軌跡の範囲に自然と目が向くはずです。

【解 1】

(1) $f'(x)=6x^2+6px+3p$
$\quad =3(2x^2+2px+p)$

$y=f(x)$ のグラフが極大値，極小値をとるので

$f'(x)$ が正から負，負から正と符号変化を起こす

$y=f'(x)$ のグラフが下に凸の放物線であることをふまえると

$2x^2+2px+p=0 \cdots (*)$ の判別式を D として，$\dfrac{D}{4}>0$

ゆえに，$p^2-2p>0$ であり，これを解くと，$p<0$，$2<p$ …答

(2) $(*)$ の 2 つの実数解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-p \\ \alpha\beta=\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-p)^2-2\cdot\frac{p}{2} \\ &= p(p-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \\ &= -p\left\{p(p-1)-\frac{p}{2}\right\} \\ &= -p^2\left(p-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta) &= 2(\alpha^3+\beta^3)+3p(\alpha^2+\beta^2)+3p(\alpha+\beta)-3p^2 \\ &= -2p^2\left(p-\frac{3}{2}\right)+3p^2(p-1)-3p^2-3p^2 \\ &= p^3-6p^2 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) $(\alpha, f(\alpha))$，$(\beta, f(\beta))$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(X, Y)$ とする。

$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ Y=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \end{cases}$ であるため，(2) の結果を用いると

$$\begin{cases} X=-\dfrac{p}{2} & \cdots ① \\ Y=\dfrac{1}{2}p^3-3p^2 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$p=-2X$

これを ② に代入し，$Y=\dfrac{1}{2}(-8X^3)-3\cdot 4X^2$
$\quad =-4X^3-12X^2$

また，(1) より，$p<0$，$2<p$ であるから，$-2X<0$，$2<-2X$

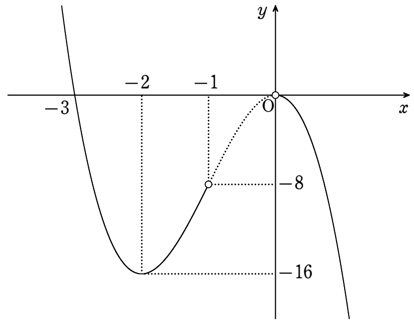
すなわち $X<-1$，$0<X$

ゆえに，求める軌跡の方程式は $y=-4x^3-12x^2$ $(x<-1, 0<x)$

$y'=-12x^2-24x$
$\quad =-12x(x+2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-16	↗	0	↘

これを図示すると



【戦略 2】(2) について

極値の高次計算を回避する工夫として，$f(x)$ を $f'(x)$ で割るという，
割り算を活用する
方法があります。

【解 2】(2) の部分的別解

(*) の 2 つの実数解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-p \\ \alpha\beta=\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

ここで

$$\begin{array}{r} x+\frac{1}{2}p \\ 2x^2+2px+p\,\overline{\big)\,2x^3+3px^2+3px-\frac{3}{2}p^2} \\ \underline{2x^3+2px^2+px\qquad\qquad} \\ px^2+2px-\frac{3}{2}p^2 \\ \underline{px^2+p^2x+\frac{1}{2}p^2} \\ -(p^2-2p)x-2p^2 \end{array}$$

よって，$f(x)=\dfrac{1}{3}f'(x)\left(x+\dfrac{1}{2}p\right)-(p^2-2p)x-2p^2$ が成立する。

$f'(\alpha)=0$，$f'(\beta)=0$ であるため，$\begin{cases} f(\alpha)=-(p^2-2p)\alpha-2p^2 \\ f(\beta)=-(p^2-2p)\beta-2p^2 \end{cases}$

ゆえに，

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=-(p^2-2p)(\alpha+\beta)-4p^2 \\ &=p(p^2-2p)-4p^2 \\ &=p^3-6p^2 \ \cdots 圏 \end{aligned}$$

【総括】

3 次関数の極大値の和については定番のトピックスと言ってもよく，確保したい話題です。

【解 1】の対称式としての処理が王道的だと思います。

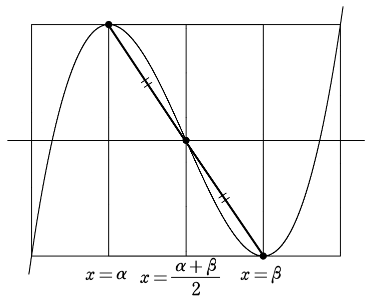
また，今回のように極大となる点と，極小となる点を結ぶ線分の中点

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$$

を扱う問題も頻出です。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

3 次関数の変曲点に対する点対称性を認めると，以下の解答が考えられます。



$f''(x)=12x+6p$ であるため，$f''(x)=0$ となる x は $x=-\dfrac{1}{2}p$ であり，

変曲点は $\left(-\dfrac{1}{2}p,\ \dfrac{1}{2}p^3-3p^2\right)$ となります。

これが，$(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分の中点であるため

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{1}{2}p^3-3p^2$$

すなわち，$f(\alpha)+f(\beta)=p^3-6p^2$ を得ることになります。

なお，上のグラフの等間隔性も併せて押さえておきましょう。

3 次関数は「8 畳 1 間」に住んでいる