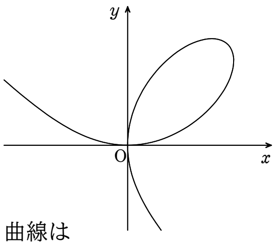
有名曲線【デカルトの正葉線】

$x^3-3axy+y^3=0\ (a>0)$ で
定義される曲線は
デカルトの葉(または，葉線)
と呼ばれている。
これによって囲まれる第1象限の
面積 S を求めたい。



(1) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とするとき，
$x^3-3axy+y^3=0\ (a>0)$ で表される曲線は

$$r=\frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

と表せることを示せ。

(2) (1) の置き換えにより，$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\,d\theta$ と表せることを用いて
S を求めよ。

＜ ’15 横浜市立大 改 ＞

【戦略】

(1) **$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を $x^3-3axy+y^3=0$ にぶち込みます。**

これにより

$$r^2\{r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)-3a\cos\theta\sin\theta\}=0$$

となり，$r=0$　または　$r=\dfrac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$

を得ます。

ただ，

「$r=\dfrac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$ を満たす (r,θ) 集まれ～」

という呼びかけで集まってくる (r,θ) の中には

「極($r=0$ で表される点)」

も入っています。

なので，結局 $r=\dfrac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$ で事足ります。

(2) **極座標による扇形近似を用いてよいということなので，ありがたく使わせていただきましょう。**

$r^2=\left(\dfrac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\right)^2$ **となりますが，** $\left(\dfrac{3a\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}\right)^2$

と見てやることで， $\left(\dfrac{3a\tan\theta}{1+\tan^3\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ **と，$t=\tan\theta$ という置換積分の目途が立ちます。**

今回の曲線を C と呼ぶと，x，y の対称性から

(x,y) が C 上ならば，(y,x) も C 上

ということが言えます。

つまり，C が $y=x$ について対称なグラフであることを利用して，面積も省エネすることにします。

【解答】

(1) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくと，曲線 $x^3-3axy+y^3=0\ (a>0)$ は

$$r^3\cos^3\theta-3ar^2\cos\theta\sin\theta+r^3\sin^3\theta=0$$

$$r^2\{r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)-3a\cos\theta\sin\theta\}=0$$

$$r=0\quad\text{または}\quad r=\frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\ \cdots①$$

$r=0$ は極を表し，① は極を通る。

以上から，$x^3-3axy+y^3=0\ (a>0)$ で表される曲線は

$$r=\frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

と表される。

(2) $r^2=\left(\dfrac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\right)^2$

$$=\left(\frac{3a\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{3a\tan\theta}{1+\tan^3\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$x^3-3axy+y^3$ は，x，y について対称であるため，
$x^3-3axy+y^3=0$ は，直線 $y=x$ について対称である。

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\,d\theta=\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\theta\right)\times2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\theta$$

$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\to$	1

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3a\tan\theta}{1+\tan^3\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2dt$$

$$=3a^2\int_0^1\frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\,dt$$

$$=3a^2\int_0^1\frac{(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}\,dt$$

$$=3a^2\left[-\frac{1}{(1+t^3)}\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}a^2\ \cdots \text{答}$$

【総括】

このトピックスの例題のためにあるような問題でした。

$y=x$ についての対称性に気が付かなかった場合

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3a\tan\theta}{1+\tan^3\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

ですが，$t=\tan\theta$ という置き換えに対して，

θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$
t	$0\ \to\ \infty$

で，

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2dt$$

という極限(広義積分)になります。

この広義積分は

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{u}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2dt$$

と見ます。

積分区間以外の計算過程は【解答】と同じなので省略しますが，

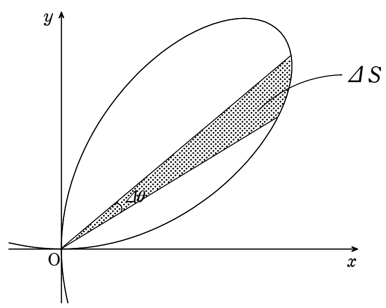
$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{u}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2dt&=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\left\{3a^2\left[-\frac{1}{(1+t^3)}\right]_0^u\right\}\\&=\lim_{u\to\infty}-\frac{3}{2}a^2\left\{\frac{1}{1+u^3}-1\right\}\\&=\frac{3}{2}a^2\end{aligned}$$

となります。

(原題は「$\int_0^{\infty}f(t)\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}f(t)\,dt$ と解釈する」という注釈が入っていたので，出題側は広義積分で処理させたかったのだと思われます。)

今回の扇形近似についてですが，極方程式 $r=f(\theta)$ で表される曲線に対する面積計算において有効なものです。

本問を例にすると，極座標 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ に対し，
区間 $[0,\ \theta]$ で，線分 OPが掃過する面積を $S(\theta)$ と呼びます。



θ の増分 $\varDelta\theta$ に対する面積の増分 $\varDelta S=S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)$ を扇形で近似し，

$$\frac{1}{2}r^2\varDelta\theta$$

と見ます。

これにより，$\dfrac{\varDelta S}{\varDelta\theta}=\dfrac{S(\theta+\varDelta\theta)-S(\theta)}{\varDelta\theta}=\dfrac{1}{2}r^2$ であり，$\varDelta\theta\to0$ とすると，

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2$$

です。

つまり，$S'(\theta)=\dfrac{1}{2}r^2$ で，$S(0)=0$ に注意すると

$$S(\theta)=\Big[S(\theta)\Big]_0^{\theta}=\int_0^{\theta}S'(\theta)\,d\theta=\int_0^{\theta}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

今回求めたい S は $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるため，$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$ ということになります。