(1)　$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(2)　極方程式 $r=\theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ。

＜ '02 京都大 ＞

【戦略】

(1)　**導関数の計算においては** All or Nothing **です。**

(2)　**直交座標系の方が慣れ親しんでいると思いますので，極方程式を直交座標 (x, y) に関する方程式に書き換えます。**

原点が極である場合，極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) を対応付ける関係は

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

であり，今回の $r=\theta$ という極方程式は

$$\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$$

というパラメータ表示で表せます。

パラメータ表示された曲線の長さについては

$$\int_{\bigcirc}^{\square}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

で仕留めます。

今回は $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=1+\theta^2$ **となりますから**

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$ **を計算することになります。**

部分積分をかますと， $\displaystyle\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$

これを $\displaystyle\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$ **と見てやれば**

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

と，同形出現により

$\displaystyle 2\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$　**ですから**

結局は $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$ **の計算ということになります。**

この積分は (1) の結果が強力に効いてきます。

【解答】

(1)　
$$f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cdots 答$$

(2)　この曲線上の点 (x, y) は直交座標系において

$$\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

で与えられる。

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2$$
$$=1+\theta^2$$

求める長さを L とすると

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$=\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-L+\left[\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^{\pi} \quad (\because (1))$$

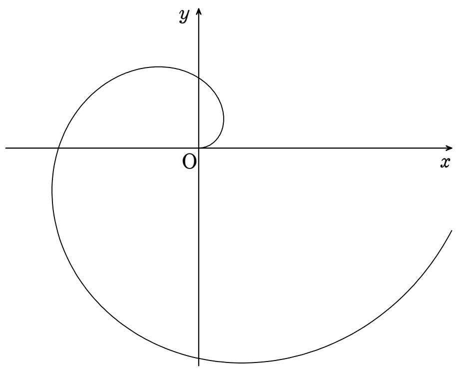
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-L+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

ゆえに，$2L=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$

$$L=\frac{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})}{2} \quad \cdots 答$$

【総括】

極方程式 $r=a\theta$ で表される曲線は「アルキメデスの渦巻線」と呼ばれる有名曲線です。



今回の弧長 L については (1) のヒントがなかったら難問です。

$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ という形の積分に対してはアプローチの仕方は様々です。

これについては，

実践演習：双曲線の絡んだ面積

において詳細を解説しています。

なお，(1) の結果を活かす今回の計算過程で現れた

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

についてはノーヒントであった場合，次のように式変形することで解くことができます。

【ヒントに頼らずに解いてみる】

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

この一連の式変形のカラクリは後述します。

$$\int\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}}{\left\{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}\left\{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}}\,dx$$

$t=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと，

$$dt=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}\,dx$$

よって，

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\{\log(1+t)-\log(1-t)\}+C$$ （ C は積分定数 ）

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}+C$$

$$\frac{1+t}{1-t}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}=(x+\sqrt{x^2+1})^2$$

ゆえに，

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})^2+C$$
$$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

【カラクリの種明かし】

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ の形を見て，$x=\tan\theta$ と置換したくなった人も多いかと思います。

この置き換えだと，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

となります。

しかし，$\sqrt{A^2}=|A|$ と，単純に $\sqrt{\bigcirc^2}$ を処理するわけにはいきません。

ただ，細かいことを抜きにすれば，$\int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ という形がこの積分の難しさを司っている部分だとわかるでしょう。

$\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta$ は

$$\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\,d\theta$$

と見て $t=\sin\theta$ と置換することで，$\int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt$ となります。

$x=\tan\theta$ という置き換えをすると，$\sqrt{\bigcirc^2}$ の処理で困ってしまいましたが，「じゃあ置き換えずにやってしまえ」というのが発想の素です。

$x=\tan\theta$ とおいたとき，これも細かいことをぬきにすれば

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

で，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ であり，$d\theta=\cos^2\theta\,dx=\frac{1}{1+x^2}\,dx$ に相当します。

ですから，$\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$ は

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

と見えるわけです。

次の一手である $\int \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\,d\theta$ は

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}}{\left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}\left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}}\,dx$$

に相当します。

この後の $t=\sin\theta$ という置き換えは当然 $t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ という置き換え に相当します。