等式 $|x-2y|=y+\sqrt{1-x}+1$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。
< '11 和歌山県立医科大 >

【戦略】

ひとまず $\sqrt{1-x}$ は整数にならないと話になりません。

つまり，$\sqrt{\quad}$ の中身である $1-x$ は平方数ということになります。

そこで，$1-x=k^2$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ とおくことにより

$$|x-2y|=y+k+1$$

となります。

ここからは絶対値の処理となりますので

「$x \geqq 2y$ のとき」，「$x<2y$ のとき」

とで場合分けをします。

例えば，$x \geqq 2y$ のときは，$x-2y=y+k+1$ と絶対値が外れ

$$y=-\frac{1}{3}(k^2+k)$$

と，x，y がともに k の式で表せました。

これらを $x \geqq 2y$ という場合分けの前提の不等式にぶち込めば

$1-k^2 \geqq -\frac{2}{3}(k^2+k)$，**すなわち $k^2-2k-3 \leqq 0$ という 2 次不等式が得られ範囲が絞られます。**

$x<2y$ のときも全く同様です。

【解答】

与えられた等式は $\sqrt{1-x}=|x-2y|-y-1$ と変形できる

この右辺は整数なので，左辺も整数であり，$1-x=k^2$，すなわち

$$x=1-k^2 \quad (k=0, 1, 2, \cdots) \cdots ①$$

とおくことができる。

(i) $x \geqq 2y$ $\cdots(*)$ のとき

$$x-2y=y+\sqrt{1-x}+1$$

① より，$1-k^2-2y=y+k+1$

これより，$y=-\frac{1}{3}(k^2+k)$ $\cdots$ ②

①，② を $(*)$ に代入すると，$1-k^2 \geqq -\frac{2}{3}(k^2+k)$

整理すると，$k^2-2k-3 \leqq 0 \iff (k-3)(k+1) \leqq 0$

これより，これを満たす 0 以上の整数 k は

$$k=0, 1, 2, 3$$

② より，$y=-\frac{1}{3}k(k+1)$ が整数となるためには

$$k=0, 2, 3$$

このとき，①，② より，$(x, y)=(1, 0), (-3, -2), (-8, -4)$

(ii) $x<2y$ $\cdots(**)$ のとき

$$2y-x=y+\sqrt{1-x}+1$$

① より，$2y-(1-k^2)=y+k+1$

これより，$y=-k^2+k+2$ $(=(k-2)(k+1))$ $\cdots$ ③

①，② を $(**)$ に代入すると，$1-k^2<2(-k^2+k+2)$

整理すると，$k^2-2k-3<0 \iff (k-3)(k+1)<0$

これを満たす 0 以上の整数 k は $k=0, 1, 2$

このとき，①，③ より $(x, y)=(1, 2), (0, 2), (-3, 0)$

以上 (i)，(ii) から

$(x, y)=(1, 0), (-3, -2), (-8, -4), (1, 2), (0, 2), (-3, 0)$ $\cdots$ 答

【総括】

絶対値と平方根の処理としてはどちらも 2 乗処理で外せるということがちらつきますが，2 乗することばかり考えるとしんどいでしょう。

特に，$\sqrt{1-x}$ の方は【解答】のように $1-x=k^2$ として，$\sqrt{1-x}=k$ と処理することを考えましょう。

多少実験をしてみると，x を決めると，次は y という構造が見え，そのような意識がはたらきますから，y を出そうという気持ちになるでしょう。

それが

x を k の式で表す $\rightarrow$ y を k の式で表す

という【解答】の流れに息づいています。