

放物線の平行移動による通過領域

放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える。 $k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、

$$\vec{OR} = \frac{1}{k} \vec{OP} + k \vec{OQ}$$

を満たす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\lim_{k \rightarrow +0} S(k), \lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。

< '18 東京大 >

【戦略 1】

いきなりでよく分からなかったら、 $k=1$ とでもしてみましょう。

$k=1$ のときは $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ ですから、 R の存在領域は放物線を x 軸方向に $|\vec{OQ}|$ 分だけ平行移動させたときの通過領域であることが分かります。

要するに

放物線の平行移動による通過領域の問題である

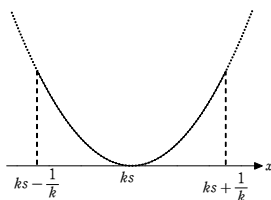
ことが見抜けたらかなり前進です。

これが見抜けているということは、 $Q(s, 0)$ を固定し、 $P(t, t^2)$ を動かしたときの R を出し、(この時点で放物線) その後 Q の固定を外して Q を動かす(平行移動)ということが無意識のうちにできている証拠です。

本問のカギはそこにあり、動点が 2 つある場合、まずは片方を固定して 1 つだけ動かし、その後固定していた点を動かす、と 1 つずつ動かして考えるのが急所です。予選決勝法の考え方ですね。

それができれば、 s を固定したときの R の軌跡は、

$$\text{放物線 } y = k(x - ks)^2 \quad \left(ks - \frac{1}{k} \leq x \leq ks + \frac{1}{k} \right)$$



であるところまではいけるはずですよ。

あとは、固定していた s を外して平行移動させたときの通過領域を考えればよいことになります。

平行移動の際は、 $x=0$ から $x=k$ まで軸が動くと思える(軸をもって移動させるイメージをもつ) と分かりやすいでしょう。

その際、軸が $x=0$ のときの右側端点の x 座標 $\frac{1}{k}$ と、軸が $x=k$ のときの左側端点の x 座標 $k - \frac{1}{k}$ の大小によって、通過領域の概形が異なることに注意して場合分けが必要となります。

面積計算の際は、真正面からぶつかると思える(大抵くじけると思いますが)から、平行移動した図形の面積であることを存分に活かして、できる限り工夫をしたいところです。

【解 1】

C 上の点 P は (t, t^2) ($-1 \leq t \leq 1$) とおける。
線分 OA 上の点 Q は $(s, 0)$ ($0 \leq s \leq 1$) とおける。

ゆえに、 $\vec{OP} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ と表せる。

$$\text{よって、} \vec{OR} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}t + ks \\ \frac{1}{k}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって、} R(X, Y) \text{ とすると、} \begin{cases} X = \frac{1}{k}t + ks \dots \text{①} \\ Y = \frac{1}{k}t^2 \dots \text{②} \end{cases}$$

ここで、 s を固定して t を動かしたときの R の軌跡を考える。

① より、 $t = kX - ks$ で、これを ② に代入すると

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{k} (kX - ks)^2 \\ &= \frac{1}{k} (k^2 X^2 - 2k^2 s X + k^2 s^2) \\ &= kX^2 - 2k^2 s X + k^2 s^2 \\ &= k(X - ks)^2 \end{aligned}$$

t を動かしたときの軌跡を求めるということは t を消すということです

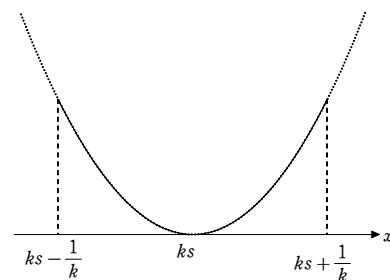
また $-1 \leq t \leq 1$ より、 $-1 \leq kX - ks \leq 1$ なので、 $k > 0$ に注意すると、

$$ks - \frac{1}{k} \leq X \leq ks + \frac{1}{k}$$

文字が死んだら遺産の整理。生前持っていた条件を引き継ぎましょう

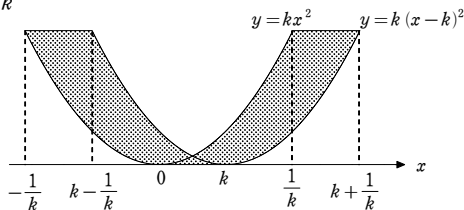
ゆえに、 s を固定したときの R の軌跡は、

$$\text{放物線 } y = k(x - ks)^2 \quad \left(ks - \frac{1}{k} \leq x \leq ks + \frac{1}{k} \right)$$



ここで、 s の固定を外して、 s を $0 \leq s \leq 1$ の範囲で動かすと、軸 $x = ks$ は $x=0$ から $x=k$ まで動くことから、次のように場合分けすることができる。

(i) $k - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}$, すなわち $(0 <) k \leq \sqrt{2}$ のとき

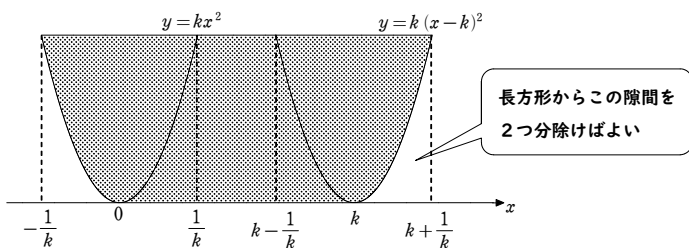


$S(k) =$ $\times 2 -$
 各々足してダブリを引く

平行移動したので面積は同じ
 $\times = k \times \frac{1}{k} = 1$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} S(k) &= 1 \times 2 - 2 \times \int_0^{\frac{k}{2}} kx^2 dx \\ &= 2 - \frac{2k}{3} \left[x^3 \right]_0^{\frac{k}{2}} \\ &= 2 - \frac{k^4}{12} \end{aligned}$$

(ii) $k - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$, すなわち $k \geq \sqrt{2}$ のとき



$$\begin{aligned} S(k) &= \left\{ \left(k + \frac{1}{k} \right) - \left(-\frac{1}{k} \right) \right\} \left(\frac{1}{k} \right) - 2 \int_{-\frac{1}{k}}^0 kx^2 dx \quad (\because \text{平行移動による合同性}) \\ &= 1 + \frac{2}{k^2} - 2 \int_0^{\frac{1}{k}} kx^2 dx \quad (\because \text{対称性}) \\ &= 1 + \frac{2}{k^2} - 2 \left[\frac{k}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{k}} \\ &= 1 + \frac{4}{3k^2} \end{aligned}$$

以上から $S(k) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{12}k^4 & (0 < k \leq \sqrt{2} \text{ のとき}) \\ 1 + \frac{4}{3k^2} & (k \geq \sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases} \dots \text{㊦}$

また, $\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = 2 \dots \text{㊦}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = 1 \dots \text{㊦}$

【戦略2】領域を出す部分

【解1】で, $R(X, Y)$ として, $\begin{cases} X = \frac{1}{k}t + ks \dots \text{①} \\ Y = \frac{1}{k}t^2 \dots \text{②} \end{cases}$ を導いたあとに

①, ② を満たす t, s が $\begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$ の範囲に存在するための X, Y の条件を求めることで, R の存在領域を出してみます。

通称「逆像法」と呼ばれる手法で, 私は「しらみつぶしの考え方」と呼んでいる手法です。

例えば R が $(1, 2)$ になることができるか? というのを考えれば

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{k}t + ks \\ 2 = \frac{1}{k}t^2 \end{cases} \text{を満たすような点 } P, Q \text{ がとれるか?}$$

(すなわち t, s がとれるか?)

ということを考えるわけです。

$(1, 2)$ になれるか? $(2, 5)$ になれるか? $(-3, 17)$ になれるか? ... キリがないので文字の力を借りてこれを調べるのです。

文字なんて何だっていいですから, ここではそのまま点 R が (X, Y) になれるか? と考えていきます。

【解2】部分的別解

($R(X, Y)$ とすると, $\begin{cases} X = \frac{1}{k}t + ks \dots \text{①} \\ Y = \frac{1}{k}t^2 \dots \text{②} \end{cases}$ を出すところまでは

【解1】と同じ)

①, ② を満たす実数 t, s が $\begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$ に存在するための X, Y の条件を求める。

② より, $Y \geq 0$ であることが必要で, このとき $t = \pm \sqrt{kY}$ であり, これが $-1 \leq t \leq 1$ に存在するとき

$$0 \leq \sqrt{kY} \leq 1, \text{ すなわち } 0 \leq Y \leq \frac{1}{k} \text{ である。}$$

(**注意**: $-1 \leq \sqrt{kY} \leq 1$ ですが, $\sqrt{kY} \geq 0$ であることを加味しています。)

一方, $t = \pm \sqrt{kY}$ を ① に代入すると, $X = \pm \sqrt{\frac{Y}{k}} + ks$

これより, $s = \frac{1}{k} \left\{ X \mp \sqrt{\frac{Y}{k}} \right\}$ (複号同順)

よって, $0 \leq s \leq 1$ だから, $0 \leq \frac{1}{k} \left\{ X \mp \sqrt{\frac{Y}{k}} \right\} \leq 1$

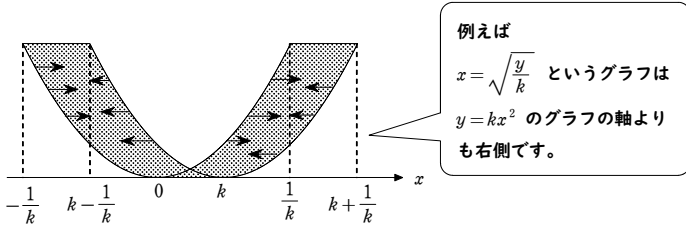
$$k > 0 \text{ より, } 0 \leq X \leq \sqrt{\frac{Y}{k}} \leq k$$

$$\text{左側の不等式を整理すると, } X \geq \sqrt{\frac{Y}{k}}, \text{ または } X \geq -\sqrt{\frac{Y}{k}}$$

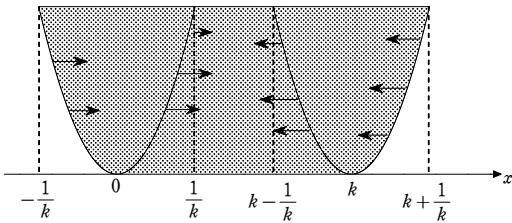
$$\text{右側の不等式を整理すると, } X \leq k + \sqrt{\frac{Y}{k}} \text{ または } X \leq k - \sqrt{\frac{Y}{k}}$$

$$\text{以上をまとめると, } \begin{cases} 0 \leq Y \leq \frac{1}{k} \\ X \geq \sqrt{\frac{Y}{k}} \\ X \leq k + \sqrt{\frac{Y}{k}} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 0 \leq Y \leq \frac{1}{k} \\ X \geq -\sqrt{\frac{Y}{k}} \\ X \leq k - \sqrt{\frac{Y}{k}} \end{cases}$$

(i) $k - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}$, すなわち $(0 <) k \leq \sqrt{2}$ のとき



(ii) $k - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$, すなわち $k \geq \sqrt{2}$ のとき



(面積計算, 及び極限計算は【解1】同様)

【総括】

とにかくにも $R(X, Y)$ とおき, この X, Y を式で表すところからスタートします。

【解1】のように $\frac{1}{k}\overline{OP}$ という部分が放物線の形を司り, $k\overline{OQ}$ という部分が平行移動を司っているという構造を見抜き, 予選決勝的なスタンスで直接通過領域を考える方法が試験場では最も現実味のある方針でしょう。(直接通過領域を考えているこの方法を順像法と言います)

あるいは【解2】のように $R(X, Y)$ が存在できる領域を求めるために, 「うまく P, Q がとれるか?」, すなわち「うまく t, s が存在するか?」という t, s の存在条件にもちこむ逆像法も, 自然な発想です。

なぜなら, 本問では単純な放物線の平行移動による通過領域でしたが, 一般の通過領域の問題では目で追うことが難しいため, 逆像法を用いて処理することが定番中の定番で, このことをきちんと勉強してきた人からすれば, 逆像法による解答もまた自然な発想となり得るわけです。

また, 逆像法の方針で, s, t の存在条件を考えるにあたって

$$\begin{cases} X = \frac{1}{k}t + ks \dots \textcircled{1} \\ Y = \frac{1}{k}t^2 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を st 平面で考えて, 直線 $t = \pm\sqrt{kY}$ と直線 $t = -k^2s + kX$ が $\begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ という領域内で交点をもつかどうかという翻訳をすることも可能です。(同じ結果に帰着するかどうか自分の手で確かめてみて下さい)

本問は取るべき手法によって, 様々な重要事項が顔を出すエッセンスの凝縮した問題です。試験場では取れる解法は1つですが, 普段の学習においては【解2】も含めて自分のものにしておくことで幹を太くしておきましょう。