　1 の立方根のうち虚数のものを ω とし，$z=x\omega+y\omega^2$ とおく。
ただし，x，y は実数とする。

(1)　x，y が $|z|=1$ を満足するとき，点 (x, y) が座標平面上でえがく曲線 C が表す方程式を求めよ。

(2)　C によって囲まれる図形の面積を求めよ。

＜ '75 帯広畜産大 改 ＞

【戦略】

(1)　**$|z|^2=1$ であるため，$z\overline{z}=1$，つまり $(x\omega+y\omega^2)(x\overline{\omega}+y\overline{\omega}^2)=1$ を処理していくことになります。**

1 の虚数立方根 ω の性質として $\begin{cases}\omega^3=1\\ \omega^2+\omega+1=0\\ \omega^2=\overline{\omega}\end{cases}$

という基本事項を駆使しながらほぐしていくことが考えられます。

$(x\omega+y\omega^2)(x\overline{\omega}+y\overline{\omega}^2)=1$ **を展開して整理すると**

$$x^2\omega\overline{\omega}+xy\omega\overline{\omega}(\omega+\overline{\omega})+y^2\omega^2\overline{\omega}^2=1$$

となります。

ω の上記性質から

$$\omega\overline{\omega}=\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$$
$$\omega+\overline{\omega}+1=0,\ \text{すなわち}\ \omega+\overline{\omega}=-1$$

ということが言えますから

$x^2-xy+y^2=1$ **を得て，これが求める曲線 C が表す方程式です。**

(2)　**(1) で得た方程式は x，y について対称な式です。**

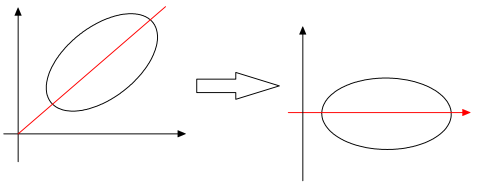
つまり，(a, b) が C 上の点であるならば，(b, a) も C 上の点であるわけです。

これが意味するところは，

曲線 C は $y=x$ について対称である

ということです。

ここから，



というように

対称軸を x 軸に重ねると，x 軸対称な図形が出てくるはず

と思えれば，C 上の点 (x, y) を $-\dfrac{\pi}{4}$ させた点 (X, Y) が満たす関係式を得たいという流れで頭が動いていきます。

【解答】

(1)　$|z|=1$ という条件から，$|z|^2=1$，すなわち $z\overline{z}=1$

$(x\omega+y\omega^2)(x\overline{\omega}+y\overline{\omega}^2)=1$

$x^2\omega\overline{\omega}+xy\omega\overline{\omega}^2+xy\omega^2\overline{\omega}+y^2\omega^2\overline{\omega}^2=1$

$x^2\omega\overline{\omega}+xy\omega\overline{\omega}(\omega+\overline{\omega})+y^2\omega^2\overline{\omega}^2=1$ …①

ここで，ω は $\omega^3=1$，すなわち $\omega^3-1=0$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

ω は虚数で $\omega\fallingdotseq 1$ なので，$\omega^2+\omega+1=0$ …② を満たす。

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のときは $\omega^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のときは $\omega^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$

いずれにせよ $\omega^2=\overline{\omega}$ …③

③ を② に代入すると，$\omega+\overline{\omega}+1=0$，すなわち $\omega+\overline{\omega}=-1$ …④

また，③ より，$\omega\overline{\omega}=\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$ …⑤

④，⑤ を ① に代入し，$x^2-xy+y^2=1$ を得る。

以上から，求める曲線 C が表す方程式は $x^2-xy+y^2=1$ …答

(2)　曲線 C 上の各点 (x, y) を原点中心に $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を (X, Y) とする。

このとき，(X, Y) を原点中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点が (x, y) なので

$$\begin{aligned}x+yi&=(X+Yi)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Yi)(1+i)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(X-Y)+(X+Y)i\}\end{aligned}$$

ゆえに，$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\end{cases}$

(x, y) は曲線 C 上の点より，$x^2-xy+y^2=1$ を満たすため

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2-\frac{1}{2}(X+Y)(X-Y)+\frac{1}{2}(X+Y)^2=1$$

これを整理すると，$\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{3}{2}Y^2=1$

ゆえに，$\dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{Y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=1$

よって，点 (X, Y) が描く曲線 C' は楕円 $\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=1$

曲線 C によって囲まれる図形の面積と，曲線 C' によって囲まれる図形の面積は同じであるため，求める面積は

$$\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \cdots \text{答}$$

※ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ の面積は πab

【総括】

$$\begin{aligned} X+Yi &= (x+yi)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+yi)(1-i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+y)-(x-y)i\} \end{aligned}$$

と見て，$\begin{cases} X=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ Y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$ としても，手元にあるのは

$$x^2-xy+y^2=1$$

という x，y の関係式です。

もちろんここから，$\begin{cases} x=(X, Y\text{ の式}) \\ y=(X, Y\text{ の式}) \end{cases}$ と直して代入してもよいですが，

だったら，【解答】のように最初から，

$$x+yi=(X+Yi)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

と見て $\begin{cases} x=(X, Y\text{ の式}) \\ y=(X, Y\text{ の式}) \end{cases}$ を Get してしまおうということになります。

このあたりの一般の 2 次曲線 (正確には 2 次形式と呼ばれます) を今回のような変数変換によって標準形に直す話は

固有値・固有ベクトル
エルミート行列
ユニタリ行列
正規直交化
ジョルダン標準形

というキーワードの話題となり，高校数学の範囲を超えてきます。

変数変換の誘導付きであれば，高校範囲で出せなくもないですが，誘導を付けるとただの計算問題になり下がってしまいます。

ノーヒントであれば

「x，y の対称性から
『$-45°$ 回転させると x 軸対称な図形が得られて嬉しい事が起こるかも 』
と見抜いてね」

という本問のような問い方が面白さを損なわないギリッギリのラインだと思います。