n は整数で，$n \geqq 4$ とする。次の問いに答えよ。

(1) x^n を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) x^n を $(x-1)^4$ で割ったときの余りを $R(x)$ とするとき，$R(2)$ を求めよ。

＜ '97 文教大 ＞

【戦略 1】

(1) **求める余りは 2 次式で割った余りですから，高々 1 次式です。**

商を $A(x)$ とでも設定すると，

$$x^n=(x-2)(x-3)+px+q$$

となります。

これは x の恒等式ゆえ，$x=2$，3 を代入すると $\begin{cases}2p+q=2^n\\3p+q=3^n\end{cases}$

という p，q に関する連立方程式となりますので，p，q について解けばおしまいです。

(2) **高々 3 次の余りを ax^3+bx^2+cx+d と設定し，同様に考えると**

$$x^n=(x-1)^4Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$$

という関係式が得られます。

しかし a，b，c，d という 4 つの未知数に対して，代入可能な x の値は $x=1$ しかありません。
((1) は割る 2 次式が異なる 2 つの解を持っていたので未知数の個数に対して，条件式の個数が足りたのですが。)

このようなタイプを私は「重解型」と呼んでいます。

重解型の倒し方は様々ありますが，数学Ⅲ まで学習していれば「積の微分法」を用いて処理していく方針が有名です。

これについては初見でできる人もいるでしょうが，多くの人にとっては経験による裏打ちがないと厳しいでしょう。

【解 1】

(1) x^n を $(x-2)(x-3)$ で割った商を $A(x)$ とする。

2 次式で割った余りは高々 1 次なので，求める余りを $px+q$ とおく。

このとき，$x^n=(x-2)(x-3)A(x)+px+q$ …(*)

(*) に $x=2$，3 を代入すると，$\begin{cases}2p+q=2^n\\3p+q=3^n\end{cases}$ となる。

これより，$p=3^n-2^n$，$q=3\cdot2^n-2\cdot3^n$

ゆえに求める余りは $(3^n-2^n)x+(3\cdot2^n-2\cdot3^n)$ …答

(2) x^n を $(x-1)^4$ で割った商を $Q_1(x)$ とする。

4 次式で割った余りは高々 3 次なので，求める余り $R(x)$ を

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

とおく。

このとき，$x^n=(x-1)^4Q_1(x)+ax^3+bx^2+cx+d$ …①

① の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}nx^{n-1}&=4(x-1)^3Q_1(x)+(x-1)^4Q_1'(x)+3ax^2+2bx+c\\&=((x-1)^3Q_2(x)+3ax^2+2bx+c \text{ と表せる } \cdots ②)\end{aligned}$$

② の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}n(n-1)x^{n-2}&=3(x-1)^2Q_2(x)+(x-1)^3Q_2'(x)+6ax+2b\\&=((x-1)^2Q_3(x)+6ax+2b \text{ と表せる } \cdots ③)\end{aligned}$$

③ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}n(n-1)(n-2)x^{n-3}&=2(x-1)Q_3(x)+(x-1)^2Q_3'(x)+6a\\&=((x-1)Q_4(x)+6a \text{ と表せる } \cdots ④)\end{aligned}$$

①，②，③，④ に $x=1$ を代入すると

$$\begin{cases}a+b+c+d=1 & \cdots(\text{ア})\\3a+2b+c=n & \cdots(\text{イ})\\6a+2b=n(n-1) & \cdots(\text{ウ})\\6a=n(n-1)(n-2) & \cdots(\text{エ})\end{cases}$$

(ウ) より，
$$\begin{aligned}2b&=n(n-1)-6a\\&=n(n-1)-n(n-1)(n-2)\quad(\because(\text{エ}))\\&=n(n-1)\{1-(n-2)\}\\&=-n(n-1)(n-3)\end{aligned}$$

(イ) より，
$$\begin{aligned}c&=n-3a-2b\\&=n-\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)+n(n-1)(n-3)\\&=\frac{n}{2}\{2-(n-1)(n-2)+2(n-1)(n-3)\}\\&=\frac{n}{2}\{n^2-5n+6\}\\&=\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)\end{aligned}$$

(ア) より

$$
\begin{aligned}
d &= 1-a-b-c \\
&= 1-\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-3)-\frac{1}{2}n(n-2)(n-3) \\
&= \frac{1}{6}\{6-n(n-1)(n-2)\}+\frac{1}{2}n(n-3)\{(n-1)-(n-2)\} \\
&= -\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n-6)+\frac{1}{2}n(n-3) \\
&= -\frac{1}{6}(n-3)(n^2+2)+\frac{1}{2}n(n-3) \\
&= -\frac{1}{6}(n-3)\{(n^2+2)-3n\} \\
&= -\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)
\end{aligned}
$$

ゆえに，x^n $(n \geqq 4)$ を $(x-1)^4$ で割った余り $R(x)$ は

$$\left\{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\right\}x^3-\left\{\frac{1}{2}n(n-1)(n-3)\right\}x^2+\left\{\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)\right\}x-\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

よって

$$R(2)=\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)-2n(n-1)(n-3)+n(n-2)(n-3)-\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{2}{3}n(n-1)\{2(n-2)-3(n-3)\}+\frac{1}{6}(n-2)(n-3)\{6n-(n-1)\}$$

$$=-\frac{2}{3}n(n-1)(n-5)+\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(5n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1 \quad \cdots 答$$

【戦略 2】(2) について

3 次以下の整式の置き方は ax^3+bx^2+cx+d という置き方が全てではありません。

$$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$$

という置き方をしたって別に構わないでしょう。

（これだって立派な 3 次以下の整式です。）

これは多項式の作り方を

x^3，x^2，x，1 を各々何倍かして足し合わせて作る

という作り方から

$(x-1)^3$，$(x-1)^2$，$(x-1)$，1 を各々何倍かして足し合わせて作る

という言わば，$x \to x-1$ への変換みたいなものです。

$(x-1)$ を基準にする世界の話に置き換えます。

【解 2】(2) について

$n \geqq 4$ のとき，二項定理から

$$
\begin{aligned}
x^n &= \{(x-1)+1\}^n \\
&= 1+{}_n\mathrm{C}_1(x-1)^1+{}_n\mathrm{C}_2(x-1)^2+{}_n\mathrm{C}_3(x-1)^3+(x-1)^4Q(x)
\end{aligned}
$$

（ただし，$Q(x)$ は x の整式）

と表せる。

よって，x^n $(n \geqq 4)$ を $(x-1)^4$ で割った余り $R(x)$ は

$$R(x)=1+{}_n\mathrm{C}_1(x-1)^1+{}_n\mathrm{C}_2(x-1)^2+{}_n\mathrm{C}_3(x-1)^3$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
R(2) &= 1+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3 \\
&= 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
&= \frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1 \quad \cdots 答
\end{aligned}
$$

【総括】

(1) は確保して然るべきです。

(2) の重解型は差が付きます。

恐らく単元学習の段階ではラスボス的存在として位置していたトピックスでしょうが，演習段階では「経験によって差が付く標準問題」という位置づけです。

【解 2】について

普段，$\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$ を基に ax^3+bx^2+cx+d という多項式を考えていますが，今回は

$\{(x-1)^3,\ (x-1)^2,\ (x-1),\ 1\}$ を基にしているというわけです。

専門用語を振りかざすと，これを「基底」と言います。

恐らく，ベクトル分野で

$\vec{a}$，$\vec{b}$ を基に，これらを何倍かして足し合わせる $(p\vec{a}+q\vec{b}$ の形で表す$)$

というのが基本のシナリオだと勉強していると思います。

この元となる $\vec{a}$，$\vec{b}$ も「基底」と言います。

見ての通り，多項式の世界もベクトルと同じような要領で表現できるわけです。

このような世界を，数学では「ベクトル空間」と言います。
(高校範囲だと，ベクトルというと幾何的なものを思い浮かべるしかないと思いますが，実はもっと広い意味をもっています。)

もちろんベクトル空間を厳密に定義しようとすると上の説明ではガバガバですから，詳しくは大学以降の線形代数での学習に譲ることにします。

こうしてみると，

なぜ $R(2)$ を求めさせたんだろう？

という疑問を持った人もいたかもしれませんが，【解 2】を見ると

そりゃ $x=2$ だわ

となりますね。