四面体の切断と体積【カバリエリの原理】

　四面体 ABCD は AC＝BD，AD＝BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

＜ '18 京都大 ＞

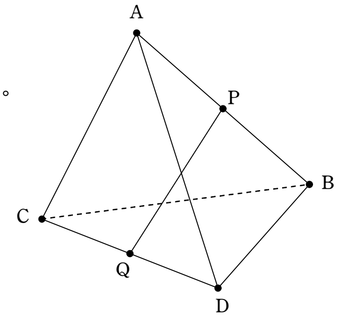
【戦略 1】

座標・幾何・ベクトル などの分野の選択が考えられますが，(1) はとりあえずはベクトルを用いて (内積)＝0 を目指したいと思います。

(2) は (1) に引き続きベクトルの路線で考えて行きますが，やがて限界が訪れます。

$\mathrm{AS}:\mathrm{SD}=\mathrm{BR}:\mathrm{RC}=t:1-t$ **という関係が導けたら，ベクトルはお役御免で，辺の比を把握して全体の体積を V とした体積比を考える方向に走りたいところです。**

【解 1】



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{b}\\&=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}\ \cdots(*)\end{aligned}$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ で，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2$

$$|\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}\iff\vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2}$$

また，条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$ で，$|\vec{d}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2$

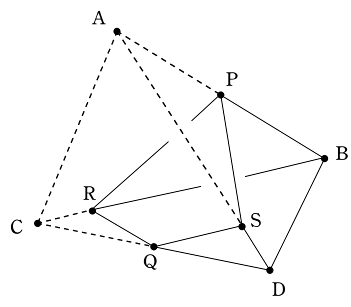
$$|\vec{d}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}\iff\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}$$

これらを (*) に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}\\&=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}|\vec{d}|^2\\&=0\end{aligned}$$

となり，辺 AB と線分 PQ は垂直であることが示された。

(2)　α の切り口のうち，P，Q 以外の頂点を R，S とする。



(図 1)

R と S は $\begin{cases}\text{辺 AD，BC 上}\\\text{辺 AC，BD 上}\end{cases}$

のいずれかであるが，条件の対称性よりどちらで考えても構わない。

よって，
　R が辺 BC 上，S が辺 AD 上のときを考えれば十分である。

$\mathrm{AS}:\mathrm{SD}=t:1-t$，$\mathrm{BR}:\mathrm{RC}=s:1-s$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=t\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

P，Q，R，S は同一平面上ゆえ $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\ell\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ とおける。

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+\ell\left(\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AS}}=(1-k-\ell)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\ell\,\overrightarrow{\mathrm{AR}}\\
\Leftrightarrow\ &t\,\vec{d}=(1-k-\ell)\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+k\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)+\ell\{(1-s)\vec{b}+s\,\vec{c}\}\\
&\quad=\frac{1-k+\ell-2s\ell}{2}\vec{b}+\frac{k+2s\ell}{2}\vec{c}+\frac{k}{2}\vec{d}
\end{aligned}
$$

$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ は1次独立であるから，$\begin{cases} 1-k+\ell-2s\ell=0 & \cdots ① \\ k+2s\ell=0 & \cdots ② \\ \dfrac{k}{2}=t & \cdots ③ \end{cases}$

①＋② より $1+\ell=0$ で，$\ell=-1$ を得る。

これを ② に代入すると，$k-2s=0$ で，$k=2s$

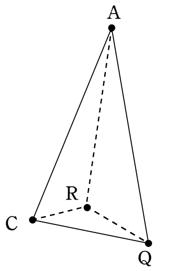
これを ③ に代入すると $s=t$ を得る。

これより，$\mathrm{AS}:\mathrm{SD}=t:1-t$，$\mathrm{BR}:\mathrm{RC}=t:1-t$

四面体 ABCD の体積を V としたとき，
(図1) の点線部分の立体の体積が
$\frac{1}{2}V$ であることを示せばよい。

四面体 ACRQ の体積を V_1 とすると

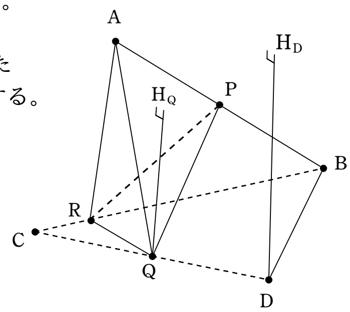
$$
\begin{aligned}
\frac{V_1}{V}&=\frac{\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{CRQ}\cdot h}{\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot h}\quad(h\text{ は頂点 A と平面 BCD との距離})\\
&=\frac{\triangle\mathrm{CRQ}}{\triangle\mathrm{BCD}}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{CR}\cdot\sin\theta_1}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CB}\cdot\sin\theta_1}\quad(\angle\mathrm{BCD}=\theta_1\text{ とおいた})\\
&=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CB}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{1}\\
&=\frac{1-t}{2}
\end{aligned}
$$



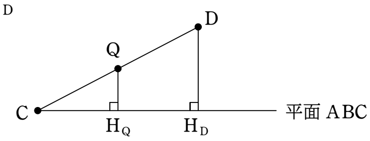
ゆえに，$V_1=\frac{1-t}{2}V$ …①

四面体 ARQP の体積を V_2 とする。

点 Q，D から平面 ABC に下ろした
垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_Q}$，$\mathrm{H_D}$ とする。



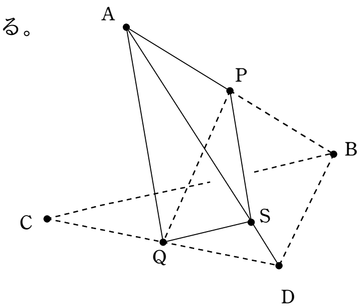
$$
\begin{aligned}
\frac{V_2}{V}&=\frac{\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ARP}\cdot\mathrm{QH_Q}}{\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH_D}}\\
&=\frac{\triangle\mathrm{ARP}}{\triangle\mathrm{ABC}}\cdot\frac{\mathrm{QH_Q}}{\mathrm{DH_D}}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ARB}}{\triangle\mathrm{ABC}}\cdot\frac{\mathrm{QH_Q}}{\mathrm{DH_D}}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BR}\cdot\mathrm{BA}\cdot\sin\theta_2}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BA}\cdot\sin\theta_2}\cdot\frac{\mathrm{QH_Q}}{\mathrm{DH_D}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{QH_Q}}{\mathrm{DH_D}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{t}{4}
\end{aligned}
$$



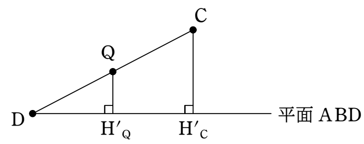
ゆえに，$V_2=\frac{t}{4}V$ …②

四面体 AQSP の体積を V_3 とする。

点 C，Q から平面 ABD に下ろした
垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H'_C}$，$\mathrm{H'_Q}$ とする。



$$
\begin{aligned}
\frac{V_3}{V}&=\frac{\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{APS}\cdot\mathrm{QH'_Q}}{\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABD}\cdot\mathrm{CH'_C}}\\
&=\frac{\triangle\mathrm{APS}}{\triangle\mathrm{ABD}}\cdot\frac{\mathrm{QH'_Q}}{\mathrm{CH'_C}}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AS}\cdot\mathrm{AP}\cdot\sin\theta_3}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin\theta_3}\cdot\frac{\mathrm{QH'_Q}}{\mathrm{CH'_C}}\\
&=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{QH'_Q}}{\mathrm{CH'_C}}\\
&=\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{t}{4}
\end{aligned}
$$



ゆえに，$V_3=\frac{t}{4}V$ …③

したがって (図1) の点線部分の体積は

$$
\begin{aligned}
V_1+V_2+V_3&=\frac{1-t}{2}V+\frac{t}{4}V+\frac{t}{4}V\\
&=\frac{2-2t+t+t}{4}V\\
&=\frac{1}{2}V
\end{aligned}
$$

となり，題意は示された。

【戦略 2】

【解 1】における$s=t$ から何を見出すかですが，この切り分けられた 2 つの立体が全く同じ図形 (立体として合同) であると見抜ければ一発です。

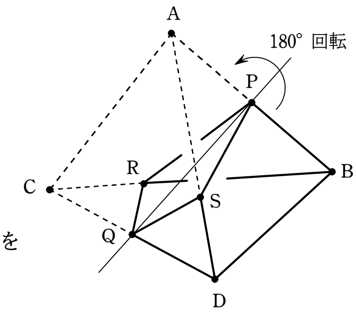
直線 PQ を軸として，題意の 2 つの立体を 180 ° 回転させると

点 B が点 A に移る (辺 AB を回転させても不変)
点 D が点 C に移る (辺 CD を回転させても不変)
点 P は点 P のまま
点 Q は点 Q のまま

ですから，あとは R と S の関係を言うことになりますが，$s=t$ ということからCR と DS が 等しいことになります。

上の対応関係から，辺 DA を回転させると，辺 CB に一致し，さらに CR＝DS ですから，点 S の回転先が点 R ということになり，これで解決です。

【解 2】部分的別解　【解 1】で $s=t$，$\ell=-1$ を得たあと



$s=t$ ということは

AS : SD＝BR : RC＝t : $1-t$

今，AD＝BC なので

点 R，S は長さが等しい 2 つの線分を同じ比率で内分することになる。

すなわち，AS＝BR

これより，平面 α によって切り分けられた 2 つの立体

K_1 (図の実線部)，K_2 (図の点線部)

について，直線 PQ を軸として，一方を 180° 回転させると他方に重なる。

したがって，K_1，K_2 の体積は等しい。

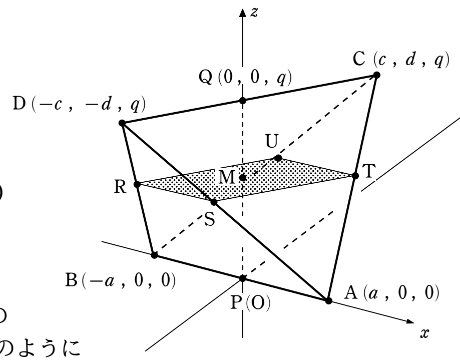
【戦略 3】

座標を設定してみます。

ただ，座標設定する際には闇雲に設定するのではなく，労力が最小限になるように設定します。中点の状況，及び (1) の結果から，P を原点，直線 PQ が z 軸，A，B は x 軸上に設定しましょう。

体積を考えるときには，断面積を考えることになりますが，
どの断面も平面 α によって 2 等分されている
ということが言えればよいことになります。

【解 3】



右の図のように座標を設定できる。

ただし，$a>0$，$q>0$
$c>0$，$d>0$

この四面体 ABCD を $z=k$ で切ったときの切り口の四角形を図のように RSTU とし，この四角形 RSTU と z 軸との交点を M とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-t)\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c\\d\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-at+ct\\dt\\qt\end{pmatrix}$$

T の z 座標が k のときを考えるので，$qt=k$，すなわち $t=\dfrac{k}{q}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\begin{pmatrix}a+\dfrac{(c-a)k}{q}\\ \dfrac{dk}{q}\\ k\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{OU}}$ については $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ の a を $-a$ に変えればよく，

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\begin{pmatrix}-a+\dfrac{(c+a)k}{q}\\ \dfrac{dk}{q}\\ k\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ については $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ の c を $-c$ に，d を $-d$ に変えればよく，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\begin{pmatrix}a+\dfrac{(-c-a)k}{q}\\ \dfrac{-dk}{q}\\ k\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ については $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ の a を $-a$ に変えればよく，

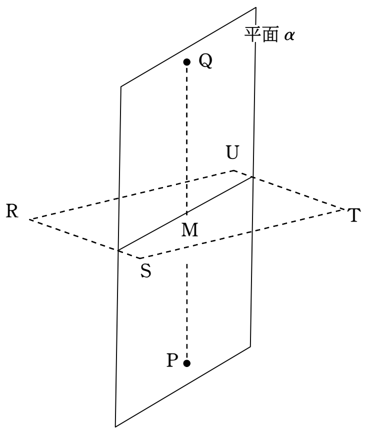
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}-a+\dfrac{(a-c)k}{q}\\ \dfrac{-dk}{q}\\ k\end{pmatrix}$$

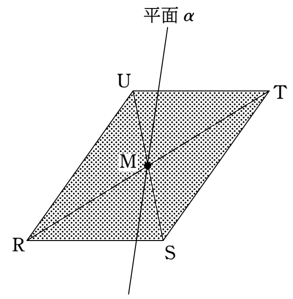
$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-a+\dfrac{(a-c)k}{q}\\ \dfrac{-dk}{q}\\ k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+\dfrac{(c-a)k}{q}\\ \dfrac{dk}{q}\\ k\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OU}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}a+\dfrac{(-c-a)k}{q}\\ \dfrac{-dk}{q}\\ k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a+\dfrac{(c+a)k}{q}\\ \dfrac{dk}{q}\\ k\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}$$

つまり，対角線 RT，US はそれぞれ中点で交わり，その交点が M である。

ゆえに，この切り口は平行四辺形である。





＜真上（z 軸正の方向）から見た図＞

したがって，線分 PQ を含む任意の平面 α と四面体ABCD の $z=k$ による切り口の平行四辺形 RSTU の交線は M を通る。

四面体 K を平面 α によって切り分けた立体を K_1，K_2 とすると，

K_1，K_2 の $z=k$ による切り口の断面積は，平面 α によって 2 等分されている。

したがって，K_1，K_2 の体積は等しい。

【総括】

今回考えた 3 路線の中で最も現実的な路線は【解 1】のように「体積比を考え，片方が全体の $\dfrac{1}{2}$ となっていることを示す」路線でしょう。

【解 2】の「回転によって一致するという合同性を見出す」という路線は見えれば早いですが，その反面思いつきづらいと思います。

【解 3】は

「断面積が常に等しいならば，2 つの立体の体積が等しい」という

「カバリエリの原理」

がもとにあります。

時間無制限であればともかく，限られた時間の中では中々難しいでしょう。