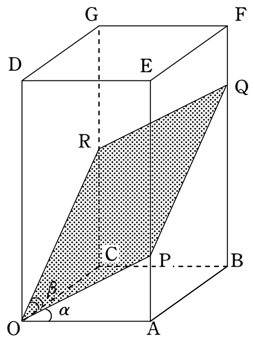
1辺の長さが1の正方形を底面とする四角柱 OABC−DEFG を考える。
3点 P，Q，R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，∠AOP を α，∠COR を β とおく。

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。
さらに $\alpha\leqq\beta$ のとき $\tan\alpha$ の値を求めよ。



＜ ’14 東京大 ＞

【戦略】

(1) **この四角形 OPQR が平行四辺形であることに気が付けば，ベクトルの面積公式で一発です。**

座標系をとればスムーズに話が進みます。

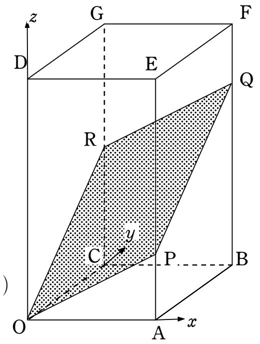
(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ **を** $\tan(\alpha+\beta)=\tan\dfrac{\pi}{4}$ **と見て，**

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

と見ることができれば，$\tan\alpha+\tan\beta$，$\tan\alpha\tan\beta$ **という和と積の情報が得られ，対称式に関する定番の処理となります。**

【解答】

(図1) のように座標軸をとる。



(図1)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\\\tan\alpha\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}0\\1\\\tan\beta\end{pmatrix}$

すると，O，P，Q，R は同一平面上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は1次独立であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}+v\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}$　（u，v は実数）

と表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\begin{pmatrix}1\\0\\\tan\alpha\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\1\\\tan\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\u\tan\alpha+v\tan\beta\end{pmatrix}$$

Q の x 座標，y 座標はそれぞれ1であり，$u=v=1$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}1\\1\\\tan\alpha+\tan\beta\end{pmatrix}$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\\tan\alpha+\tan\beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\\tan\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\tan\alpha\end{pmatrix}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ であるため，四角形 OPQR は平行四辺形で，

$$S=2\triangle\mathrm{OPR}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPR}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}\end{aligned}$$

よって，$S=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$ …答

(2) $S=\dfrac{7}{6}$ より，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$

こうやって見ることができるかがカギです。

また，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan(\alpha+\beta)=1$，すなわち $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\tan\alpha+\tan\beta=s$，$\tan\alpha\tan\beta=t$ とすると

$$1+s^2-2t=\frac{49}{36}\ \cdots①,\quad \frac{s}{1-t}=1\cdots②$$

② より $s=1-t$ でこれを ① に代入して

$$1+(1-t)^2-2t=\frac{49}{36}$$

整理すると，$36t^2-144t+23=0 \iff (6t-23)(6t-1)=0$

ここで，$\alpha>0$，$\beta>0$ より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$

つまり，$0<t<1$ であるため，$t=\dfrac{1}{6}$ でこのとき $s=\dfrac{5}{6}$

ゆえに，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$ …答

解と係数の関係から $\tan\alpha$，$\tan\beta$ は x についての2次方程式

$$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$$

の実数解であり，これを解くと $x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$

$0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ …答

【戦略 2】(2) について

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ を $\tan(\alpha+\beta)=1$ と見ずに，例えば $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ などという文字消去に走ると，シンドイ 4 次方程式が現れます。

正直引き返したくなる重さです。

【解 2】(2) について

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$\beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ だから，$\tan\beta=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}\cdots(*)$ に代入すると，

$$1+\tan^2\alpha+\left(\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right)^2=\frac{49}{36}$$

$\tan\alpha=T$ とおくと，$1+T^2+\left(\dfrac{1-T}{1+T}\right)^2=\dfrac{49}{36}$

分母を払うと，$36(1+T^2)(1+T)^2+36(1-T)^2=49(1+T)^2$

これを整理すると，

この４次方程式は心が折れるでしょう。

$$36T^4+72T^3+59T^2-98T+23=0$$

$$(3T-1)(2T-1)(6T^2+17T+23)=0$$

ここで，$6T^2+17T+23=0$ の判別式 D について，

$$D=17^2-4\cdot6\cdot23=-263<0$$

T は実数なので，$T=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$

一方今度は α を消去し，$T'=\tan\beta$ とおくと，同様にして，
$T'=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ を得る。

$T=T'$ とすると，$T=T'=\dfrac{1}{2}$ のときも $T=T'=\dfrac{1}{3}$ のときも $(*)$ を満たさない。

よって T，T' は相異なり，$(T,\ T')=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

ゆえに，$\tan\alpha+\tan\beta=T+T'=\dfrac{5}{6}\cdots$答

また，$0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$(T,\ T')=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}\cdots$答

【総括】

対称性を崩してしまった【解 2】の路線はシンドイ思いをするでしょう。

そういったイヤらしさは東大らしいと言えばらしいです。

試験場であれば，対称性を崩して現れる鬼４次方程式と遭遇した時点で

・方針を見直す
・他の問題に移る

など一旦冷静に引き返すのが現実的です。

何の迷いもなく対称性を活かして解ききる受験生もいるでしょうから差が付くレベルだとは思います。